RODICA TRANDAFIR

PROBLEME DE MATEMATICI PENTRU INGINERI

Ediția a II-a, revizuită și completată

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI — 1977

Redactor: LILI TICOŞ
Tehnoredactor: ELENA GERU
Coperta seriei: ALEX. BANU

Bun de tipar: 28.04.1977. Coli de tipar 33,75.
Tiraj: 17.500+90 exemplare legate. Ediţia întîi: 1969.
C.Z. 51(075.8:021)

C. 11. — I. P. INFORMAŢIA
str. Brezoianu nr. 23—25
Bucureşti

PREFAȚĂ

În condițiile contemporane cînd producția materială se desfășoară pe baze tot mai științifice, metodele matematicilor moderne devin o necesitate imperioasă în procesul de cunoaștere și a practicii de producere a bunurilor materiale.

Culegerea prezentă își propune înfățișarea unor probleme complet rezolvate, grupate în zece capitole și anume : algebră și analiză vectorială, funcții de o variabilă complexă, elemente de calcul matriccal și tensorial, serii Fourier și integrala Fourier, calcul operațional, funcții și ecuații speciale, ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi, teoria probabilităților, statistică matematică și elemente de programare matematică.

În ediția a II-a au fost revizuite și completate majoritatea capitolelor lucrării și plecînd de la faptul că metodele statisticii matematice, bazate pe teoria probabilităților, își găsesc o largă aplicabilitate în fiecare domeniu de activitate — fizică, biologie, economie, medicină, agricultură etc. — s-a dezvoltat capitolul de teoria probabilităților. Ținînd seama de importanța teoriei selecției în controlul calității producției, de faptul că experiențele duc la verificarea unor ipoteze statistice, capitolul de statistică matematică își propune prezentarea unor probleme bazate pe aceste metode cu aplicabilitate în diverse domenii.

În această formă lucrarea fiind unitară încearcă să răspundă unor necesități de adîncire a pregătirii în domeniul matematicilor a inginerilor, economiștilor, a studenților de la facultățile de științe, a celor interesați în studiul acestor probleme, care posedă deja cunoștințe de analiză matematică, algebră superioară, geometrie analitică și diferențială precum și noțiuni fundamentale de teoria probabilităților și statistică matematică.

AUTOAREA

CUPRINS

Prefaţă 3

Cap. I Algebră şi analiză vectorială 5
Cap. II. Funcţii de o variabilă complexă 63
Cap. III. Elemente de calcul matriceal şi tensorial 160
§ 1. Elemente de calcul matriceal 160
§ 2. Calcul tensorial 166
Cap. IV. Serii Fourier. Integrala Fourier 208
Cap. V. Calcul operaţional 226
Cap. VI. Funcţii şi ecuaţii speciale 278
Cap. VII. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea 310
Cap. VIII. Teoria probabilităţilor 358
Cap. IX. Statistică matematică 435
Cap. X. Elemente de programare matematică 474
Bibliografie 532
Anexe 534

Capitolul I

ALGEBRĂ ŞI ANALIZĂ VECTORIALĂ

Fiind dat un domeniu D din spaţiul euclidian E_3 raportat la un sistem de axe de coordonate carteziene ortogonale $Oxyz$, se numeşte *cîmp scalar* o funcţie scalară

$$\varphi(P) = \varphi(x, y, z),$$

definită pentru orice punct $P(x, y, z) \in D$.

Suprafaţa de ecuaţie

$$\varphi(P) = \varphi(P_0), \quad (P_0 = \text{fix}),$$

se numeşte *suprafaţă de nivel* a cîmpului $\varphi(P)$, ataşată punctului P_0.

Fie o curbă (Γ) care trece prin punctul P_0, $\vec{t}$ versorul tangentei la curbă în acest punct, P un punct oarecare al curbei (Γ) şi l_{P_0P} abscisa curbilinie a punctului P faţă de P_0.

Dacă

$$\lim_{P \to P_0} \frac{\varphi(P) - \varphi(P_0)}{l_{P_0P}}$$

există, valoarea ei se numeşte *derivata cîmpului scalar* $\varphi(P)$ *după direcţia de versor* $\vec{t}$ în punctul P_0 şi se notează

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{t}}\right)_{P_0}.$$

Dacă α, β, γ sînt componentele versorului $\vec{t}$, avem

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{t}}\right)_{P_0} = \alpha \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} + \beta \frac{\partial\varphi}{\partial y_0} + \gamma \frac{\partial\varphi}{\partial z_0}.$$

Notînd cu $\vec{n}$ versorul normalei la suprafața de nivel care trece prin P_0 și cu θ unghiul dintre $\vec{t}$ și $\vec{n}$, avem

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{t}}\right)_{P_0} = \left(\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right)_{P_0} \cdot \cos\theta.$$

De asemenea

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right)_{P_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\right)^2}.$$

Dacă $\varphi_h(P)$, $(h = 1, \ldots, n)$, sînt funcții diferențiabile și la fel funcția $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, atunci

$$\frac{dF}{d\vec{t}} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \varphi_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \vec{t}}.$$

Vectorul de componente $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}$ se numește *gradientul* cîmpului scalar diferențiabil $\varphi(P)$ în punctul $P_0 \in D$ și se notează

$$(\text{grad } \varphi)_{P_0}.$$

Avem

$$\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{d\vec{n}} \vec{n}.$$

De asemenea

$$\text{grad } F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \varphi_h} \text{grad } \varphi_h.$$

Operatorul diferențial vectorial

$$\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

se notează cu $\vec{\nabla}$ și se numește *operatorul lui Hamilton* sau operatorul *nabla*.

Deci

$$\text{grad}\ \varphi = \vec{\nabla}\varphi, \quad \frac{d\varphi}{d\vec{l}} = (\vec{l}\vec{\nabla})\varphi.$$

Fie $\vec{u}$ un vector de mărime u şi versor $\vec{u}_0$, adică $\vec{u} = u\vec{u}_0$. Notăm $\vec{u}\vec{\nabla} = u(\vec{u}_0\vec{\nabla})$ şi numim expresia

$$(\vec{u}\vec{\nabla})\varphi = u\frac{d\varphi}{d\vec{u}_0}$$

derivata funcţiei $\varphi(P)$ *în raport cu vectorul* $\vec{u}$.

Funcţia vectorială

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(x, y, z)$$

definită pentru orice punct $P(x, y, z) \in D$ se numeşte *cîmp vectorial*.

O curbă (Γ) situată în D se numeşte *linie de cîmp* pentru cîmpul vectorial $\vec{v}(P)$, dacă în fiecare punct P al său vectorul $\vec{v}(P)$ este tangent curbei.

Liniile de cîmp sînt soluţiile ecuaţiei diferenţiale vectoriale

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0$$

sau ale sistemului diferenţial

$$\frac{dx}{v_1(x, y, z)} = \frac{dy}{v_2(x, y, z)} = \frac{dz}{v_3(x, y, z)}. \tag{1}$$

O suprafaţă generată de liniile de cîmp se numeşte *suprafaţă de cîmp*.

Dacă $F_1(x, y, z) = C_1$, $F_2(x, y, z) = C_2$, $(C_1, C_2 = \text{const})$, sînt soluţii ale sistemului (1), atunci

$$\Phi(F_1, F_2) = 0$$

este o suprafaţă de cîmp.

Expresia

$$\vec{i}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}$$

se numeşte *divergenţa* cîmpului vectorial diferenţiabil $\vec{v}(P)$ şi se notează div $\vec{v}$.

Notînd cu v_1, v_2, v_3 componentele cîmpului vectorial $\vec{v}(P)$, avem

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Vectorul de componente

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

se numeşte *rotorul* cîmpului vectorial diferenţiabil $\vec{v}(P)$ şi se notează rot $\vec{v}$.

Avem

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

şi

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}.$$

Avem următoarele formule de calcul:

$$\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi,$$

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi,$$

$$\operatorname{div}(\vec{u} + \vec{v}) = \operatorname{div} \vec{u} + \operatorname{div} \vec{v},$$

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{v}) = \varphi \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad} \varphi,$$

$$\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{u} \operatorname{rot} \vec{v},$$

$$\operatorname{rot}(\vec{u}+\vec{v}) = \operatorname{rot}\vec{u} + \operatorname{rot}\vec{v},$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{v}) = \varphi \operatorname{rot}\vec{v} - \vec{v}\times\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{grad}(\vec{u}\vec{v}) = \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{u} + \vec{u}\times\operatorname{rot}\vec{v} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v},$$

$$\operatorname{rot}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\operatorname{div}\vec{v} - \vec{v}\operatorname{div}\vec{u} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{u} - (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{v},$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi,$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = 0,$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}.$$

O funcţie $\varphi(P)$ care admite derivate parţiale de ordinul al doilea se numeşte *funcţie armonică* dacă verifică *ecuaţia lui Laplace*

$$\Delta\varphi = 0.$$

Variabilele x_1, x_2, x_3 definite de

$$\left.\begin{aligned} x &= x(x_1, x_2, x_3) \\ y &= y(x_1, x_2, x_3) \\ z &= z(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}\right\}$$

unde $x(x_1, x_2, x_3)$, $y(x_1, x_2, x_3)$, $z(x_1, x_2, x_3)$ sînt funcţii de două ori diferenţiabile şi unde $\frac{D(x, y, z)}{D(x_1, x_2, x_3)} \neq 0$, constituie un sistem de coordonate curbilinii în spaţiul E_3.

Dacă notăm

$$\vec{r}_h = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x_h}\right)_{P_0}, \quad (h = 1, 2, 3),$$

cantităţile $R_h = |\vec{r}_h|$ se numesc *parametrii lui Lamé* ai sistemului de coordonate curbilinii x_1, x_2, x_3. Notăm $\vec{r}_h = R_h\vec{u}_h$, $\vec{u}_h$ fiind versorii noului sistem de axe de coordonate. Avem

$$\operatorname{grad} F = \sum_{h=1}^{3} \frac{1}{R_h} \frac{\partial F}{\partial x_h} \vec{u}_h,$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{R_1R_2R_3} \begin{vmatrix} R_1\vec{u}_1 & R_2\vec{u}_2 & R_3\vec{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ R_1v_1 & R_2v_2 & R_3v_3 \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{R_1R_2R_3} \left[\frac{\partial(v_1R_2R_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial(v_2R_1R_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial(v_3R_1R_2)}{\partial x_3} \right],$$

$$\Delta F = \frac{1}{R_1R_2R_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{R_2R_3}{R_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{R_1R_3}{R_2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{R_1R_2}{R_3} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_3}\right)\right].$$

Integrala curbilinie

$$\int_{\Gamma} \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{r}$$

se numeşte *circulaţia* cîmpului vectorial $\vec{v}(P)$ pe curba închisă rectificabilă, orientată (Γ).

Expresia

$$\Phi(\vec{v}, \Sigma) = \iint_{\Sigma} \vec{n}\,\vec{v}\, \mathrm{d}\sigma$$

se numeşte *fluxul total* al cîmpului vectorial $\vec{v}(P)$ prin porţiunea de suprafaţă închisă orientată (Σ), definită de ecuaţiile parametrice $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, unde funcţiile x, y, z au derivate de ordinul întîi, integrabile în domeniul (u, v) în care este definită porţiunea de suprafaţă.

Fie (Σ) o suprafaţă închisă care mărgineşte un domeniu tridimensional Ω. Suprafaţa (Σ) şi domeniul Ω au următoarele proprietăţi:

1° O dreaptă paralelă cu axele de cordonate intersectează suprafaţa (Σ) în cel mult două puncte.

2° Domeniul tridimensional Ω se proiectează pe planul xOy după un domeniu bidimensional D. Cilindrul proiectant al lui Ω pe planul xOy cu generatoarele paralele cu Oz este tangent la Ω în lungul unei curbe (Γ) care împarte pe (Σ) în două suprafeţe. Analog pentru planele yOz şi zOx.

3° Suprafaţa (Σ) este bilateră.

4° Suprafaţa (Σ) este formată dintr-un număr finit de porţiuni netede.

Avem următoarele formule integrale:

$$\iint_{\Sigma} \vec{n}\vec{v}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v}\,d\omega$$

(*formula lui Gauss-Ostrogradski* sau *formula integrală a divergenţei*),

$$\iint_{\Sigma} \vec{n}\varphi\,d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} \varphi\,d\omega$$

(*formula integrală a gradientului*);

$$\iint_{\Sigma} \vec{n} \times \vec{v}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{v}\,d\omega$$

(*formula integrală a rotorului*);

$$\iint_{\Sigma} \varphi \frac{d\psi}{d\vec{n}}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} (\operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi + \varphi\Delta\psi)\,d\omega$$

(*prima formulă integrală a lui Green*);

$$\iint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{d\psi}{d\vec{n}} + \psi \frac{\partial\varphi}{d\vec{n}} \right) d\sigma = \iiint_{\Omega} (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,d\omega$$

(*a doua formulă integrală a lui Green*).

Fie (S) o porţiune de suprafaţă bilateră orientată avînd o arie limitată de un contur rectificabil (Γ) reprezentată prin ecuaţiile parametrice

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v),$$

unde punctul (u, v) parcurge un domeniu D, funcţiile $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ fiind diferenţiabile în D.

În aceste condiţii avem *formula integrală a lui Stokes*

$$\int_{\Gamma} \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_{S} \vec{n} \operatorname{rot} \vec{v}\, d\sigma.$$

Un cîmp vectorial $\vec{v}(P)$ diferenţiabil într-un domeniu D se numeşte *irotaţional* sau *lamelar* dacă $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$.

Orice cîmp vectorial irotaţional este gradientul cîmpului scalar

$$\varphi(P) = \int_{AP} \vec{v}\, d\vec{r}, \; (A = \text{fix}).$$

Funcţia φ se mai numeşte şi *funcţie de forţă*.

Un cîmp vectorial $\vec{v}(P)$ diferenţiabil într-un domeniu D se numeşte *solenoidal* dacă $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Orice cîmp solenoidal este rotorul unui cîmp vectorial numit *potenţial vector* al cîmpului dat.

Un cîmp vectorial $\vec{v}(P)$ se numeşte *biscalar* dacă există o funcţie $\lambda(P)$ derivabilă şi o funcţie $F(P)$ de două ori diferenţiabilă, astfel încît

$$\vec{\lambda} \operatorname{grad} F.$$

Avem

$$\vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} = 0.$$

Un cîmp vectorial de forma

$$\vec{v}(P) = \mu \frac{\vec{r}}{r^3},$$

unde μ este o constantă iar $\vec{r} = \overrightarrow{PA}$, A fiind fix, se numeşte *cîmp newtonian.*

Funcţia $u(P) = -\frac{\mu}{r}$ se numeşte *potenţial newtonian* al acestui cîmp.

Sistemul

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{u}(P) &= \vec{v}(P) \\ \operatorname{div} \vec{u}(P) &= q(P) \end{aligned}\right\} (p \in D)$$

cu condiţiile

$$|\vec{u}(P)| \leqslant \frac{A}{\rho^{\lambda+1}}, \quad (\rho = |\overrightarrow{OP}| > R),$$

A şi λ fiind constante pozitive, unde $\vec{v}(P)$ şi $q(P)$ satisfac relaţiile

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \ |q(P)| \leqslant \frac{B}{\rho^{2+\mu}}, \ \vec{n}\vec{v}|_{\Sigma} = 0,$$

B şi μ fiind constante pozitive, are soluţia unică

$$\vec{u}(M) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{q(P)\vec{r} + \vec{v}(P) \times \vec{r}}{r^3} \, d\omega_p,$$

Ω şi Σ satisfac condiţiile 1°, 2°, 3°, 4°.

PROBLEME

I.1. Fie cîmpul scalar $\varphi(r) = \vec{a}\vec{r}$, unde $\vec{a}$ este un vector unitar constant, iar $\vec{r}$ vectorul de poziţie al punctului curent din spaţiu.

1° Să se determine suprafeţele de nivel ale cîmpului şi suprafaţa de nivel care trece prin punctul $A(1, 2, 3)$.

2° Să se calculeze derivata după o direcţie $\vec{s}$ a funcţiei $\varphi(r)$ şi să se arate că nu depinde de punct ci numai de $\vec{s}$, iar $\frac{d\varphi}{d\vec{a}} = 1$.

R. Suprafețele de nivel sînt date de ecuația

$$\vec{a}\,\vec{r} = C, \quad (C = \text{const})$$

și reprezintă plane perpendiculare pe $\vec{a}$.

Planul perpendicular pe $\vec{a}$ care trece prin $A(1, 2, 3)$ este

$$\vec{a}\,\vec{r} = \vec{a}\,\vec{b} \text{ cu } \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

2° Avem

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}} = \vec{s} \text{ grad } \varphi,$$

dar grad $\varphi = \vec{a}$, deci

$$\frac{d\varphi}{d\vec{s}} = \vec{a}\,\vec{s}.$$

Rezultă că

$$\frac{d\varphi}{d\vec{a}} = \vec{a} \text{ grad } \varphi = a^2 = 1.$$

I.2. Să se determine unghiul dintre gradienții cîmpului $u = \dfrac{x}{r^2}$ în punctele $A(1, 2, 3)$ și $B(-3, 1, 0)$.

R. Avem

$$\text{grad } u = x \text{ grad } \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \text{ grad } x = \frac{r^2 - 2x^2}{r^4}\vec{i} - \frac{2xy}{r^4}\vec{j} - \frac{2xz}{r^4}\vec{k}$$

și

$$\text{grad}_A\, u = \frac{7}{81}\vec{i} - \frac{4}{81}\vec{j} - \frac{4}{81}\vec{k}, \quad \text{grad}_B\, u = \frac{-8}{100}\vec{i} + \frac{6}{100}\vec{j}.$$

Rezultă

$$\cos\alpha = \frac{\text{grad}_A\, u \cdot \text{grad}_B\, u}{|\text{grad}_A\, u| \cdot |\text{grad}_B\, u|} = -\frac{8}{9},$$

de unde rezultă

$$\alpha = 152°44'.$$

I.3. Fie $\Phi(x, y, z)$ şi $\Phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ temperaturile în două vecinătăţi ale punctelor $P(x, y, z)$ şi $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ale unei regiuni oarecare din spaţiul E_3.

1° Să se interpreteze fizic cantitatea

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\vec{s}} = \frac{\Phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \Phi(x, y, z)}{\Delta\vec{s}},$$

unde $\Delta\vec{s}$ este distanţa dintre punctele P şi Q.

2° Să se evalueze $\lim\limits_{\Delta\vec{s}\to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\vec{s}} = \frac{d\Phi}{d\vec{s}}$ şi să se interpreteze fizic.

3° Să se arate că $\frac{d\Phi}{d\vec{s}} = \vec{\nabla}\Phi \cdot \frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}$.

4° Să se calculeze derivata lui $\Phi = x^2yz + 4xz^2$ în $(1, -2, -1)$ în direcţia $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

R. 1° Deoarece $\Delta\Phi$ este variaţia de temperatură între punctele P şi Q iar $\Delta\vec{s}$ este distanţa dintre aceste puncte, $\frac{\Delta\Phi}{\Delta\vec{s}}$ reprezintă valoarea medie a variaţiei de temperatură pe unitatea de distanţă în direcţia de la P la Q.

2° Dar

$$\Delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z,$$

unde ε_1, ε_2, ε_3 tind către zero o dată cu $\Delta\vec{s}$.

Atunci

$$\lim_{\Delta\vec{s}\to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\vec{s}} = \lim_{\Delta\vec{s}\to 0} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta\vec{s}} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta\vec{s}} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta\vec{s}}\right]$$

sau

$$\frac{d\Phi}{d\vec{s}} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{d\vec{s}} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{d\vec{s}} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{d\vec{s}}.$$

$\frac{d\Phi}{d\vec{s}}$ reprezintă mărimea variaţiei temperaturii în raport cu distanţa la punctul P

într-o direcţie spre Q. Aceasta se mai numeşte derivata funcţiei Φ după direcţia $\vec{s}$.

$$3^\circ \quad \frac{d\Phi}{d\vec{s}} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right)\left(\frac{dx}{d\vec{s}}\vec{i} + \frac{dy}{d\vec{s}}\vec{j} + \frac{dz}{d\vec{s}}\vec{k}\right) = \vec{\nabla}\Phi \cdot \frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}.$$

Deoarece $\frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}$ este un vector unitar, $\vec{\nabla}\Phi \cdot \frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}$ este componenta lui $\vec{\nabla}\Phi$ în direcţia acestui vector unitar, adică este proiecţia lui $\vec{\nabla}\Phi$ în direcţia $\frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}$. Această proiecţie este maximă, cînd $\vec{\nabla}\Phi$ şi $\frac{d\vec{r}}{d\vec{s}}$ au aceeaşi direcţie.

$$4^\circ \quad \vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}(x^2yz + 4xz^2) = (2xyz + 4z^2)\vec{i} + x^2z\vec{j} + (x^2y + 8xz)\vec{k},$$

$$\vec{\nabla}\Phi_A = 8\vec{i} - \vec{j} - 10\vec{k}, \text{ unde } A(1, -2, -1).$$

Vectorul unitar în direcţia $2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ este

$$\vec{a} = \frac{2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}.$$

Deci

$$\vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{a} = (8\vec{i} - \vec{j} - 10\vec{k})\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) = \frac{37}{3}.$$

Deoarece această expresie este pozitivă, Φ este crescătoare în această direcţie.

I.4. Să se determine liniile de cîmp ale cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$$

şi suprafaţa de cîmp care trece prin curba $x = 2y$, $z = a$.

R. Sistemul diferenţial al liniilor de cîmp este

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{yx^2} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

și se reduce la

$$\left.\begin{aligned} &ydx - xdy = 0 \\ &\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \end{aligned}\right\}.$$

Integrînd, se obțin ecuațiile liniilor de cîmp

$$x^2 - y^2 = C_1,$$

$$\frac{z}{xy} = C_2.$$

Să punem condiția ca o linie de cîmp să întîlnească curba $x = 2y$, $z = a$. Din ecuația $x^2 - y^2 = C_1$, folosind ecuația $x = 2y$, se obține $y^2 = \frac{C_1}{3}$, iar din ecuația $\frac{z}{xy} = C_2$, folosind ecuațiile $z = a$ și $x = 2y$, obținem $y^2 = \frac{a}{2C_2}$. Din relațiile $y^2 = \frac{C_1}{3}$ și $y^2 = \frac{a}{2C_2}$ obținem relația de condiție $2C_1C_2 = 3a$.

Suprafața de cîmp se obține prin eliminarea parametrilor C_1 și C_2 între ecuația liniilor de cîmp și această relație. Obținem

$$2z(x^2 - y^2) - 3axy = 0.$$

I.5. Să se determine liniile de cîmp ale cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v} = \left[\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}} - \frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right]\vec{a}\times\vec{b} + \left[\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}} - \frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right]\vec{b}\times\vec{c} +$$

$$+ \left[\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}} - \frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right]\vec{c}\times\vec{a}, \quad (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \neq 0).$$

și suprafața de cîmp care trece prin hiperbola $(\vec{a} + \vec{b})\vec{r} = 0$, $(\vec{b}\,\vec{r})(\vec{c}\,\vec{r}) = h^2$, cu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, h constanți.

R. Ecuația vectorială a liniilor de cîmp este

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0,$$

deci

$$\left[\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right](\vec{a}\times\vec{b})\times d\vec{r}+\left[\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right](\vec{b}\times\vec{c})\times d\vec{r}+$$

$$+\left[\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right](\vec{c}\times\vec{a})\times d\vec{r}=0\,.$$

Dezvoltînd dublele produse vectoriale şi dînd în factor pe $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, obţinem

$$\vec{a}\left[\left(\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right)(\vec{c}\,d\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right)(\vec{b}\,d\vec{r})\right]+$$

$$+\vec{b}\left[\left(\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right)(\vec{a}\,d\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right)(\vec{c}\,d\vec{r})\right]+$$

$$+\vec{c}\left[\left(\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right)(\vec{b}\,d\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right)(\vec{a}\,d\vec{r})\right]=0,$$

dar $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\neq 0$, deci $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nu pot fi liniar dependenţi. Din relaţia $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=0$ rezultă $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, deci

$$\left(\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right)(\vec{c}\,d\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right)(\vec{b}\,d\vec{r})=0,$$

$$\left(\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}\right)(\vec{a}\,d\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right)(\vec{c}\,d\vec{r})=0,$$

$$\left(\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{b}\,\vec{r}}\right)(\vec{b}\,d\vec{r})-\left(\frac{1}{\vec{a}\,\vec{r}}-\frac{1}{\vec{c}\,\vec{r}}\right)(\vec{a}\,d\vec{r})=0.$$

Aceste trei relaţii se reduc la două ecuaţii diferenţiale

$$\vec{a}\,d\vec{r}+\vec{b}\,d\vec{r}+\vec{c}\,d\vec{r}=0,$$

$$\frac{\vec{a}\,d\vec{r}}{\vec{a}\,\vec{r}}+\frac{\vec{b}\,d\vec{r}}{\vec{b}\,\vec{r}}+\frac{\vec{c}\,d\vec{r}}{\vec{c}\,\vec{r}}=0,$$

care au integralele prime

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{r}=C_1,\quad (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{b}\cdot\vec{r})(\vec{c}\cdot\vec{r})=C_2,\quad (C_1,\ C_2=\text{const}).$$

Liniile de cîmp sînt intersecţiile acestor familii de suprafeţe.

Pentru a obține suprafața de cîmp care trece prin hiperbola dată, este necesar și suficient ca sistemul

$$\left.\begin{aligned}
&(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\vec{r} &&= C_1\\
&(\vec{a}\,\vec{r})(\vec{b}\,\vec{r})(\vec{c}\,\vec{r}) &&= C_2\\
&(\vec{a}+\vec{b})\vec{r} &&= 0\\
&(\vec{b}\,\vec{r})(\vec{c}\,\vec{r}) &&= h^2
\end{aligned}\right\}$$

să fie compatibil. Condiția este $C_1C_2 = -h^4$, iar ecuația suprafeței de cîmp este

$$(\vec{a}\,\vec{r})(\vec{b}\,\vec{r})(\vec{c}\,\vec{r})(\vec{a}\,\vec{r}+\vec{b}\,\vec{r}+\vec{c}\,\vec{r}) = -h^4.$$

I.6. Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori constanți și $\varphi) = \vec{a}\,\mathrm{grad}\,r^3$, $\psi = \vec{b}\,\mathrm{grad}\,r^{-3}$. Să se evalueze

1° $\vec{b}\,\mathrm{grad}\,\varphi + r^6\vec{a}\,\mathrm{grad}\,\psi$,

2° $\mathrm{div}\,[(\varphi+\psi)\vec{r}] - 3(\varphi+\psi)$,

3° $\vec{b}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,(\varphi\vec{r}) + \vec{a}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,(r^6\psi\vec{r})$.

R. 1° Avem

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \mathrm{grad}\,(\vec{a}\,\mathrm{grad}\,r^3) = \mathrm{grad}\,[3r(\vec{a}\,\vec{r})] = 3(\vec{a}\,\vec{r})\,\mathrm{grad}\,r + 3r\,\mathrm{grad}\,(\vec{a}\,\vec{r}) =$$

$$= 3\left[\frac{(\vec{a}\,\vec{r})}{r}\vec{r} + r\vec{a}\right],$$

$$\mathrm{grad}\,\psi = \mathrm{grad}\,(\vec{b}\,\mathrm{grad}\,r^{-3}) = -\mathrm{grad}\left(3\frac{\vec{b}\,\vec{r}}{r^5}\right) = -\frac{3}{r^5}\left[\vec{b} - \frac{5(\vec{b}\vec{r})}{r^2}\vec{r}\right].$$

De aici rezultă

$$\vec{b}\,\mathrm{grad}\,\varphi + r^6\vec{a}\,\mathrm{grad}\,\psi = \frac{18}{r}(\vec{a}\,\vec{r})(\vec{b}\,\vec{r}).$$

2°

$$\mathrm{div}\,[(\varphi+\psi)\vec{r}] = \vec{r}\,\mathrm{grad}\,(\varphi+\psi) + (\varphi+\psi)\,\mathrm{div}\,\vec{r} = \vec{r}\,(\mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{grad}\,\psi) + 3(\varphi+\psi).$$

Avem deci

$$\mathrm{div}\,[(\varphi+\psi)\vec{r}] - 3(\varphi+\psi) = \vec{r}(\mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{grad}\,\psi) = 6r(\vec{a}\,\vec{r}) + 12r^{-5}(\vec{b}\,\vec{r}).$$

3° Avem

$$\text{grad div}\,(\varphi\vec{r}) = 3\,\text{grad div}\,[r(\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{r}\,] = 3\text{grad}\,[5r(\vec{a}\,\vec{r})] = 15\left[\frac{\vec{r}}{r}(\vec{a}\,\vec{r}) + r\vec{a}\right],$$

$$\text{grad div}\,(r^6\,\psi\vec{r}) = -\,3\,\text{grad div}\,[r(\vec{b}\,\vec{r})\vec{r}\,] = -\,15\left[\frac{\vec{r}}{r}(\vec{b}\,\vec{r}) + r\vec{b}\right].$$

Rezultă că

$$\vec{b}\,\text{grad div}\,(\varphi\vec{r}) + \vec{a}\,(\text{grad div}\,(r^6\psi\vec{r}) = 0.$$

I.7. Dacă $\varphi = \dfrac{\vec{r}\,\vec{k}}{r^3}$, să se arate că

$$\text{grad}\,\varphi = \frac{r^2\vec{k} - 3(\vec{r}\,\vec{k})\,\vec{r}}{r^5}.$$

Să se calculeze div grad φ şi să deducem că o soluţie a ecuaţiei $\Delta f = 0$ este dată prin $f(x, y, z) = (x + y + z)r^{-3}$.

R. Avem

$$\text{grad}\,\varphi = \text{grad}\left(\frac{\vec{r}\,\vec{k}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\,\text{grad}\,(\vec{r}\,\vec{k}) + (\vec{r}\,\vec{k})\,\text{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^3}\,\vec{k} - 3\,\frac{\vec{r}\,\vec{k}}{r^5}\cdot\vec{r} = \frac{1}{r^5}\,[r^2\vec{k} - 3\,(\vec{r}\,\vec{k})\,\vec{r}],$$

$$\text{div grad}\,\varphi = \vec{\nabla}\left[\frac{\vec{k}}{r^3} - 3\,\frac{(\vec{r}\,\vec{k})}{r^5}\,\vec{r}\right] = 0.$$

Rezultă că $\Delta\varphi = 0$.

Analog, dacă $\varphi = \dfrac{\vec{r}\,\vec{i}}{r^3}$, găsim $\Delta\varphi = 0$ şi dacă $\varphi = \dfrac{\vec{r}\,\vec{j}}{r^3}$, $\Delta\varphi = 0$.

Funcţia $f(x, y, z) = (x + y + z)r^{-3}$ se poate scrie ca o sumă de trei funcţii armonice

$$f(x, y, z) = \frac{\vec{r}\,\vec{i}}{r^3} + \frac{\vec{r}\,\vec{j}}{r^3} + \frac{\vec{r}\,\vec{k}}{r^3},$$

deci ea este armonica şi $\Delta f = 0$.

I.8. Se consideră cîmpul vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v} = \frac{a}{r^3}\,(2a\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta),\quad a = \text{const}.$$

1° Să se calculeze rot $\vec{v}$ şi funcţie de forţă.

2° Să se determine liniile de cîmp ale lui $\vec{v}$.

R. 1° În sistemul de coordonate cilindrice avem

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & r\sin\theta\vec{u}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ \dfrac{2a\cos\theta}{r^3} & \dfrac{a\sin\theta}{r^2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{a\sin\theta}{r^2}\right)\vec{u}_r + r\vec{u}_\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{2a\cos\theta}{r^3}\right) + \right.$$

$$\left. + r\sin\theta\vec{u}_\varphi\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a\sin\theta}{r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2a\cos\theta}{r^3}\right)\right]\right\} = 0.$$

Cîmpul vectorial $\vec{v}$ este irotaţional, deci există o funcţie φ aşa încît $\vec{v}$ = grad φ, deci

$$d\varphi = \vec{v}\,d\vec{r},$$

unde $d\vec{r} = \vec{u}_r\,dr + r\vec{u}_\theta\,d\theta + r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\,d\varphi$.

Avem

$$d\varphi = \frac{2a\cos\theta}{r^3}dr + \frac{a\sin\theta}{r^2}d\theta = -d\left(\frac{a\cos\theta}{r^2}\right),$$

deci funcţia de forţă este

$$\varphi = -\frac{a\cos\theta}{r^2} = C, \quad (C = \text{const}).$$

2° În coordonate curbilinii ortogonale, sistemul diferenţial care ne dă liniile de cîmp este

$$\frac{R_1 dx_1}{V_1} = \frac{R_2\,dx_2}{V_2} = \frac{R_3\,dx_3}{V_3}.$$

În cazul problemei avem

$$\frac{r^3 dr}{2a\cos\theta} = \frac{r^4\,d\theta}{a\sin\theta} = \frac{r\sin\theta\,d\varphi}{\theta}$$

cu soluţiile

$$\varphi = C_1, \quad \frac{r}{\sin^2 \theta} = C_2.$$

I.9. Se consideră cîmpul vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v} = \text{grad}\,(\vec{a}\,\text{grad}\,f),$$

unde $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, iar $f = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2yz + g(y-x, z-x)$, g fiind o funcţie derivabilă.

1° Să se determine mărimea şi direcţia cîmpului $\vec{v}$ în punctele $A(1, 2, 0)$ şi $B(2, 1, 3)$.

2° Să se calculeze liniile de cîmp ale cîmpului $\vec{v}$ şi suprafaţa de cîmp care trece prin elipsa $z = 1$, $x^2 + 4y^2 = 1$.

R. Avem

$$\vec{a}\,\text{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^3}{3} - x^2(y+z) + xyz - g_1' - g_2' - \frac{x^3}{6} +$$

$$+ \frac{x^2 z}{2} + g_1' - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 y}{2} + g_2' = xyz,$$

deci

$$\vec{v} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}.$$

1° $\vec{v}_A = 2\vec{k}$ deci are direcţia Oz şi mărimea 2, iar $\vec{v}_B = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ are mărimea 7 şi direcţia de cosinusuri directoare $\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}$.

2° Scriind ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de cîmp, obţinem

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy},$$

de unde rezultă ecuaţiile liniilor de cîmp

$$x^2 - z^2 = C_1, \quad y^2 - z^2 = C_2.$$

Pentru a găsi suprafaţa de cîmp, punem condiţia ca sistemul

$$x^2 - z^2 = C_1, \quad z = 1,$$

$$y^2 - z^2 = C_2, \quad x^2 + 4y^2 = 1$$

să fie compatibil în x, y, z. Obținem astfel relația

$$C_1 + 4C_2 + 4 = 0,$$

iar suprafața de cîmp cerută are ecuația

$$x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 4 = 0.$$

I.10. Se consideră funcțiile vectoriale

$$\vec{u} = \vec{r}\varphi(P),\ \vec{v} = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{grad} \varphi(P),\ \vec{w} = \vec{r} \times \operatorname{grad} \varphi(P),$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție iar $\varphi(P)$ o funcție armonică în D.

Fie Ω volumul mărginit de o suprafață închisă (Σ) și o curbă închisă (Γ) în D. Să se verifice relațiile

$$1^\circ \iint_\Sigma \vec{u}\vec{n}\, d\sigma = \iint_\Sigma \vec{v}\vec{n}\, d\sigma + 3 \iiint_\Omega \varphi(P)\, d\omega.$$

$$2^\circ \iint_\Sigma \vec{u} \times \vec{n}\, d\sigma = \iint_\Sigma \vec{n} \times \vec{v}\, d\sigma = \iiint_\Omega \vec{w}\, d\omega.$$

$$3^\circ \int_\Gamma \vec{u}\, d\vec{r} + \int_\Gamma \vec{v}\, d\vec{r} = 0.$$

R. 1° Aplicînd formula integrală a divergenței primelor două integrale din 1°, obținem

$$\iint_\Sigma \vec{u}\vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{r}\varphi)\, d\omega = \iiint_\Omega (3\varphi + \vec{r} \operatorname{grad} \varphi)\, d\omega.$$

și

$$\iint_\Sigma \vec{v}\vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{1}{2} r^2 \operatorname{grad} \varphi\right) d\omega = \iiint_\Omega \operatorname{grad} \varphi\, \vec{r}\, d\omega,$$

deoarece

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = 0.$$

Rezultă, înlocuind în 1°,

$$\iiint_\Omega (3\varphi + \vec{r} \operatorname{grad} \varphi)\, d\omega = \iiint_\Omega \vec{r} \operatorname{grad} \varphi\, d\omega + 3 \iiint_\Omega \varphi\, d\omega.$$

2° Vom aplica primelor două integrale formula integrală a rotorului. Avem

$$\iint_{\Sigma} \vec{u} \times \vec{n}\, d\sigma = -\iiint_{\Omega} \operatorname{rot}(\vec{r}\varphi)\, d\omega = -\iiint_{\Omega} (\operatorname{grad}\varphi \times \vec{r})\, d\omega = \iiint_{\Omega} \vec{w}\, d\omega$$

și

$$\iint_{\Sigma} \vec{n} \times \vec{v}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot}\left(\frac{1}{2} r^2 \operatorname{grad}\varphi\right) d\omega = \iiint_{\Omega} \left[\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} r^2\right) \times \operatorname{grad}\varphi\right] d\omega =$$

$$= \iiint_{\Omega} \vec{r} \times \operatorname{grad}\varphi\, d\omega = \iiint_{\Omega} \vec{w}\, d\omega.$$

3° Aplicînd formula lui Stokes, obținem

$$\int_{\Gamma} \vec{u}\, d\vec{r} = \iint_{S} \operatorname{rot}\vec{u}\, \vec{n}\, d\sigma = \iint_{S} [\operatorname{grad}\varphi \times \vec{r}]\vec{n}\, d\sigma$$

și

$$\int_{\Gamma} \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_{S} \operatorname{rot}\vec{v}\, \vec{n}\, d\sigma = \iint_{S} \left[\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} r^2\right) \times \operatorname{grad}\varphi\right] \vec{n}\, d\sigma = -\int_{\Gamma} \vec{u}\, d\vec{r}.$$

I.11. Se consideră vectorii $\vec{u} = \varphi \operatorname{grad}\psi$, $\vec{v} = \psi \operatorname{grad}\varphi$ și $\vec{w} = \psi \operatorname{grad}\varphi \times \varphi \operatorname{grad}\psi$. Să se arate că pentru orice suprafață închisă (Σ) avem

1° $$\iint_{\Sigma} \vec{w}\vec{n}\, d\sigma = 0.$$

2° Pentru orice suprafață (S) mărginită de curba (Γ) avem

$$\frac{1}{4}\int_{\Gamma} \varphi^2 d(\psi^2) = -\frac{1}{4}\int_{\Gamma} \psi^2 d(\varphi^2) = \iint_{S} \vec{w}\vec{n}\, d\sigma.$$

3° $$\frac{1}{4}\iint_{\Sigma} \varphi\psi[\psi \operatorname{grad}\varphi - \varphi \operatorname{grad}\psi] \times \vec{n}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \vec{w}\, d\omega.$$

4° Dacă funcţiile φ şi ψ sînt armonice, să se arate că dacă suprafeţele $\varphi = \text{const}$ şi $\psi = \text{const}$ sînt ortogonale, avem

$$\iint_{\Sigma} \vec{u}\vec{n}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} \vec{v}\vec{n}\, d\sigma = 0.$$

5°
$$\int_{\Gamma} \vec{v}\, d\vec{r} = -\int_{\Gamma} \vec{u}\, d\vec{r} = \iint_{S} \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\varphi\psi}\, \vec{n}\, d\sigma.$$

R. 1° Aplicînd formula integrală a divergenţei avem

$$\operatorname{div} \vec{w} = \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \varphi \times \varphi \operatorname{grad} \psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{rot}(\psi \operatorname{grad} \varphi) - \psi \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{rot}(\varphi \operatorname{grad} \psi) =$$

$$= \varphi \operatorname{grad} \psi[\psi \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi \times \operatorname{grad} \varphi] - \psi \operatorname{grad} \varphi[\varphi \cdot \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi +$$
$$+ \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi] = 0,$$

deci

$$\iint_{\Sigma} \vec{w}\vec{n}\, d\sigma = 0.$$

2°
$$\int_{\Gamma} \varphi^2 d(\psi^2) = \int_{\Gamma} 2\varphi^2 \psi \operatorname{grad} \psi \cdot d\vec{r},$$

$$\int_{\Gamma} \psi^2 d(\varphi^2) = \int_{\Gamma} 2\psi^2 \varphi \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{r},$$

dar

$$2\int_{\Gamma} \varphi^2\psi \operatorname{grad} \varphi\, d\vec{r} = 2\iint_{S} \operatorname{rot}\, [\varphi^2 \psi \operatorname{grad} \psi]\, \vec{n}\, d\sigma =$$

$$= 2\iint_{S} [\operatorname{grad}(\psi\varphi^2) \times \operatorname{grad} \psi]\, \vec{n} d\sigma = -4\iint_{S} (\operatorname{grad} \psi \times \operatorname{grad} \varphi)\varphi\psi\vec{n}\, d\sigma = 4\iint_{S} \vec{w}\vec{n}\, d\sigma.$$

Analog se obţine

$$\int_{\Gamma} \psi^2 d(\varphi^2) = -4\iint_{S} \vec{w}\vec{n}\, d\sigma,$$

deci relaţia de la punctul 2° este verificată.

$$3^\circ \iint_\Sigma \varphi\psi[\psi \operatorname{grad} \varphi - \varphi \operatorname{grad} \psi] \times \vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{rot} [\varphi\psi(\varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi)\, d\omega =$$

$$= \iiint_\Omega 4\varphi\psi\, (\operatorname{grad} \psi \times \operatorname{grad} \varphi)\, d\omega = 4 \iiint_\Omega \vec{w}\, d\omega.$$

$$4^\circ \qquad \iint_\Sigma \vec{u}\,\vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{u}\, d\omega = \iiint_\Omega \operatorname{div} (\varphi \operatorname{grad} \psi)\, d\omega =$$

$$= \iiint_\Omega (\varphi\Delta\psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi)\, d\omega = \iiint_\Omega \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi\, d\omega,$$

deoarece $\Delta\psi = 0$. Dar suprafeţele $\varphi = \text{const}$ şi $\psi = \text{const}$ sînt ortogonale, deci $\operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi = 0$. Rezultă

$$\iint_\Sigma \vec{u}\,\vec{n}\, d\sigma = 0, \iint_\Sigma \vec{v}\,\vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{v}\, d\omega = 0.$$

5° Avem

$$\int_\Gamma \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v}\,\vec{n}\, d\sigma = \iint_S \operatorname{grad} \psi \times \operatorname{grad} \varphi)\, \vec{n}\, d\sigma,$$

$$\int_\Gamma \vec{u}\, d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{u}\,\vec{n}\, d\sigma = \iint_S (\operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi)\, \vec{n}\, d\sigma = -\int_\Gamma \vec{v}\, d\vec{r}$$

şi

$$\iint_S \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\varphi\psi}\, \vec{n}\, d\sigma = \iint_S (\operatorname{grad} \psi \times \operatorname{grad} \varphi)\, \vec{n}\, d\sigma,$$

deci egalitatea este evidentă.

I.12. Să se calculeze $\int\limits_{AB} \vec{v}\, d\vec{r}$, dacă $\vec{v} = 3xy\vec{i} - 5z\vec{j} + 10x\vec{k}$, iar $A(2, 2, 1)$ și $B(5, 8, 8)$ sînt două puncte pe curba de ecuații $x = 1 + t^2$, $y = 2t^2$, $z = t^3$.

R. Avem

$$\vec{v}\, d\vec{r} = 3\, xy\, dx - 5z\, dy + 10x\, dz,$$

de unde rezultă

$$\int\limits_{AB} \vec{v}\, d\vec{r} = \int\limits_{AB} 3xy\, dx - 5z\, dy + 10x\, dz =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} [3(1 + t^2)\, 2t^2 \cdot 2t - 5t^3 \cdot 4t + 10\,(1 + t^2)\, 3t^2]\, dt =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} (12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2)\, dt = 303.$$

I.13. Să se calculeze $\iint\limits_{S} \operatorname{rot} \vec{v}\vec{n}\, d\sigma$, unde $\vec{v} = (x^2 + y - 4)\, \vec{i} + 3xy\vec{j} + (2xz + z^2)\, \vec{k}$ și (S) este suprafața sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ pentru care $z \geqslant 0$.

R. Dacă vom aplica teorema lui Stokes, avem în loc de integrala dată o integrală pe cercul $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$. Deci

$$\iint\limits_{S} \operatorname{rot} \vec{v}\, \vec{n}\, d\sigma = \int\limits_{\Gamma} \vec{v}\, d\vec{r}.$$

Avem

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{v}\, d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma} (x^2 + y - 4)\, dx + 3xy\, dy,$$

dar

$$\int\limits_{\Gamma} x^2\, dx = \left[\frac{1}{3} x^3\right]_{\Gamma} = 0, \quad \int\limits_{\Gamma} -4\, dx = [-4x]_{\Gamma} = 0, \quad \int\limits_{\Gamma} y\, dx = -16\pi,$$

deoarece cu ajutorul formulei lui Green $-\int_{\Gamma} y\,dx$ ne dă aria (S_Γ) închisă de (Γ), iar

$$\int_{\Gamma} 3xy\,dy = \iint_{S_\Gamma} 3y\,dx\,dy = 0, \text{ prin simetrie.}$$

rezultă

$$\iint_{S} \operatorname{rot} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma = -16\pi.$$

I.14. Să se arate că dacă $\int_{P_1}^{P_2} \vec{v}\,d\vec{r}$ este independentă de drumul care unește punctele P_1 și P_2 într-o regiune dată, atunci $\int_{\Gamma} \vec{v}\,d\vec{r} = 0$ pentru orice curbă închisă (Γ) în regiune și reciproc.

R. Fie $P_1AP_2BP_1$ (fig. I.14) o curbă închisă. Atunci

$$\int_{\Gamma} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{P_1AP_2BP_1} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{P_1AP_2} \vec{v}\,d\vec{r} + \int_{P_2BP_1} \vec{v}\,d\vec{r} =$$

$$= \int_{P_1AP_2} \vec{v}\,d\vec{r} - \int_{P_1BP_2} \vec{v}\,d\vec{r} = 0,$$

deoarece integrala de la P_1 la P_2 pe curba care trece prin A este egală cu integrala de la P_1 la P_2 pe curba care trece prin B, prin ipoteză.

Reciproc, dacă $\int_{\Gamma} \vec{v}\,d\vec{r} = 0$, atunci

$$\int_{P_1AP_2BP_1} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{P_1AP_2} \vec{v}\,d\vec{r} + \int_{P_2BP_1} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{P_1AP_2} \vec{v}\,d\vec{r} - \int_{P_1BP_2} \vec{v}\,d\vec{r} = 0,$$

deci

$$\int_{P_1AP_2} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{P_1BP_2} \vec{v}\,d\vec{r}.$$

I.15. Să se calculeze circulația cîmpului vectorial definit prin vectorul $\vec{v} = \vec{p} \times \vec{q}$ pe un cerc de rază a, axat perpendicular pe segmentul $\vec{AB} = 2\vec{b}$ astfel ca $AO = h$ (O fiind centrul cercului,

$\vec{p} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{BP}$). Să se verifice rezultatul cu formula lui Stokes. Să se calculeze liniile de cîmp ale lui $\vec{v}$ (fig. I.15).

R. Avem

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}, \text{ adică } \vec{p} = \vec{q} + 2\vec{b},$$

și

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}, \text{ adică } \vec{p} = \vec{h} + \vec{r}.$$

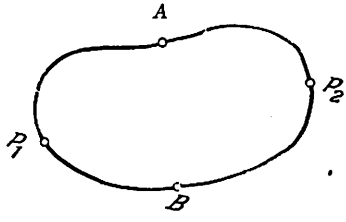


Fig. I.14

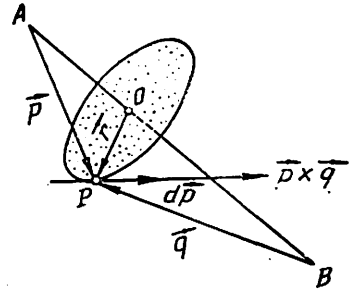


Fig. I.15

Rezultă

$$d\vec{p} = d\vec{q} = d\vec{r} \text{ și } \vec{p} \times \vec{q} = 2\vec{b} \times \vec{q} = 2\vec{b} \times \vec{r}, \text{ deoarece } q = -(2\vec{b} - \vec{h})\frac{\vec{b}}{b} + \vec{r},$$

deci circulația este

$$\int_\Gamma (\vec{p} \times \vec{q})\, d\vec{p} = \int_\Gamma (2\vec{b} \times \vec{r})\, d\vec{r}.$$

Observînd că $\vec{b}$, $\vec{r}$, $d\vec{r}$ formează un triedru drept, deci $(\vec{b}\,\vec{r}\,d\vec{r}) = ba\,ds$, unde $|\vec{r}| = a$, $|d\vec{r}| = ds$, obținem

$$\int_\Gamma (\vec{p} \times \vec{q})\, d\vec{p} = 2\int_\Gamma ba\, ds = 2ab \cdot 2\pi a = 4\pi a^2 b.$$

Aplicînd formula lui Stokes, avem

$$\int_\Gamma (2\vec{b} \times \vec{q})\, d\vec{r} = \iint_{S_\Gamma} \operatorname{rot}(2\vec{b} \times \vec{q})\, \vec{n}\, d\sigma = \iint_{S_\Gamma} 4\, \vec{b}\,\vec{n}\, d\sigma = 4\vec{b}\,\vec{S},$$

unde $\vec{S} = \pi a^2 \frac{\vec{b}}{b}$, deci obținem rezultatul găsit.

Ecuația diferențială vectorială a liniilor de cîmp este

$$(\vec{p} \times \vec{q}) \times d\vec{p} = 0,$$

sau

$$\vec{q}(\vec{p}\, d\vec{p}) - \vec{p}(\vec{q}\, d\vec{p}) = 0.$$

Vectorii $\vec{p}$ și $\vec{q}$ nu sînt coliniari, deci

$$\vec{p}\, d\vec{p} = 0,\ \vec{q}\, d\vec{q} = 0,\ \text{sau}\ \vec{q}\, d\vec{q} = 0\ \text{deoarece}\ d\vec{p} = d\vec{q},$$

de unde rezultă integralele prime

$$p^2 = C_1,\ q^2 = C_2,\ (C_1,\ C_2 = \text{const}).$$

Liniile de cîmp sînt cercuri cu centrul pe AB și situate în plane perpendiculare pe AB.

I.16. 1° Să se calculeze circulația cîmpului vectorial definit prin vectorul $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ de-a lungul triunghiului ABC dat prin vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\vec{\omega}$ fiind un vector constant.

2° Să se determine fluxul aceluiași cîmp vectorial prin suprafața triunghiului dat.

R. 1° Pentru circulație avem (fig. I.16)

$$\Gamma = \int_{ABCA} \vec{v}\, d\vec{r} = \int_{AB} \vec{v}\, d\vec{r} + \int_{BC} \vec{v}\, d\vec{r} + \int_{CA} \vec{v}\, d\vec{r}.$$

Dacă punctul M descrie segmentul $\overrightarrow{AB}$, avem

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}),\ d\vec{r} = (\vec{b} - \vec{a})\, d\lambda,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

de unde rezultă

$$\int_{AB} \vec{v}\, d\vec{r} = \int_{AB} (\vec{\omega} \times \vec{r})\, d\vec{r} = \omega \int_{AB} \vec{r} \times d\vec{r} = \vec{\omega} \int_0^1 (\vec{a} \times \vec{b})\, d\lambda = \vec{\omega}(\vec{a} \times \vec{b}).$$

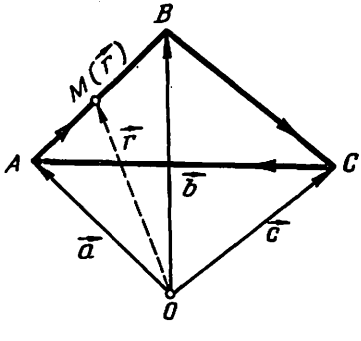


Fig. I.16.

Analog se găsesc

$$\int_{BC} \vec{v}\, d\vec{r} = \vec{\omega}(\vec{b} \times \vec{c}),\quad \int_{AC} \vec{v}\, d\vec{r} = \vec{\omega}(\vec{c} \times \vec{a}),$$

deci

$$\int_{ABCA} \vec{v}\, d\vec{r} = \vec{\omega}[\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}].$$

Pentru verificarea rezultatului, utilizăm formula lui Stokes

$$\int_{\Gamma} \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \vec{v}\, \vec{n}\, d\sigma.$$

Avem

$$\int_{ABCA} \vec{v}\,d\vec{r} = \iint_S 2\,\omega\vec{n}\,d\sigma = 2\vec{\omega}\vec{S},$$ unde $\vec{S}$ este aria suprafeței orientate a triunghiului ABC și anume $\vec{S} = \frac{1}{2}\,[\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}]$.

2° Dacă punctul M se mișcă în planul triunghiului ABC, avem

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \vec{a} + \alpha(\vec{b} - \vec{a}) + \beta(\vec{c} - \vec{b}).$$

Pentru $\beta = 0$ și $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, M descrie segmentul $\overrightarrow{AB}$; dacă $\alpha = \beta$ și $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, M descrie segmentul $\overrightarrow{AC}$, deci M descrie suprafața triunghiului ABC dacă $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ și $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Coordonatele curbilinii ale vîrfurilor sînt $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$.

Avem pentru elementul de suprafață

$$\vec{n}\,d\sigma = \vec{r}_\alpha \times \vec{r}_\beta\,d\alpha d\beta$$

sau

$$\vec{n}\,d\sigma = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{b})\,d\alpha\,d\beta = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a})\,d\alpha\,d\beta = 2\vec{S}\,d\alpha\,d\beta,$$

unde $\vec{S}$ este aria suprafeței orientate a triunghiului ABC.

Fluxul va fi

$$\Phi = \iint_\Sigma \vec{v}\vec{n}\,d\sigma = \iint_D (\vec{\omega} \times \vec{r})\,2\vec{S}d\alpha d\beta = 2\vec{S} \times \vec{\omega} \iint_D \vec{r}\,d\alpha\,d\beta,$$

D fiind domeniul parametrilor $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Înlocuind în ultima integrală pe $\vec{r}$ cu expresia determinată, obținem

$$\Phi = 2\vec{S} \times \vec{\omega} \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha [\vec{a} + \alpha(\vec{b} - \vec{a}) + \beta(\vec{c} - \vec{b})]\,d\beta =$$

$$= 2\vec{S} \times \vec{\omega} \int_0^1 \left[\frac{\alpha^2}{2}(\vec{c} - \vec{b}) + \alpha(\vec{a} + \alpha\vec{b} - \alpha\vec{a})\right] d\alpha =$$

$$= 2\vec{S} \times \vec{\omega} \left[\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{6}(\vec{c} - \vec{b})\right]$$

sau

$$\Phi = 2\vec{S} \times \vec{\omega} \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{6}.$$

I.17. Dacă $\vec{v} = y\vec{i} + (x - 2xz)\vec{j} - xy\vec{k}$, să se calculeze $\iint_\Sigma (\mathrm{rot}\,\vec{v})\vec{n}\,d\sigma$, unde (Σ) este suprafața sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ deasupra planului (xy), (fig. I. 17).

Să se verifice rezultatul aplicînd formula lui Gauss-Ostrogradski.

R. Avem

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x-2xz & -xy \end{vmatrix} = x\vec{i} + y\vec{i} - 2z\vec{k}.$$

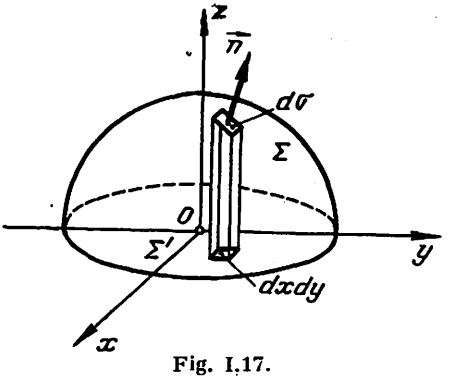


Fig. I,17.

Normala la $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ este dirijată după direcția vectorului

$$\operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k},$$

iar versorul normalei la suprafață este dat de

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a}.$$

Proiecția suprafeței (Σ) pe planul (xOy) este cercul $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$. Atunci

$$I = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot}\vec{v})\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\Sigma'} (\operatorname{rot}\vec{v})\vec{n}\,\frac{dx\,dy}{|\vec{n}\vec{k}|} =$$

$$= \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{3(x^2+y^2) - 2a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy\,dx.$$

Trecînd la coordonate polare, avem

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{3\rho^2 - 2a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \left(-3\rho\sqrt{a^2-\rho^2} + \frac{a^2\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right) d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(a^2-\rho^2)^{3/2} - a^2\sqrt{a^2-\rho^2}]_0^a\,d\theta = \int_0^{2\pi} (a^3 - a^3)\,d\theta = 0.$$

Să calculăm acum cu ajutorul formulei Gauss-Ostrogradski

$$\iint_{\Sigma} \vec{w}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{w}\,d\omega.$$

Cum $\operatorname{div} \vec{w} = 0$, unde $\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{V}$, rezultă

$$\iint_{\Sigma} \vec{w}\,\vec{n}\,d\sigma = 0.$$

I.18. Fie cîmpul vectorial definit prin vectorul $\vec{v} = 2xz\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$. Să se evalueze $\iiint_{\Omega} \vec{v}\,d\omega$, unde Ω este regiunea mărginită de suprafeţele $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$, $z = x^2$, $z = 4$.

R. Avem (fig. I.18)

$$\iiint_{\Omega} (2xz\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k})\,d\omega = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \int_{z=x^2}^{4} (2xz\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k})\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \vec{i} \int_0^2 \int_0^6 \int_{x^2}^4 2xz\,dz\,dy\,dx - \vec{j} \int_0^2 \int_0^6 \int_{x^2}^4 x\,dz\,dy\,dx + \vec{k} \int_0^2 \int_0^6 \int_{x^2}^4 y^2\,dz\,dy\,dx =$$

$$= 128\,\vec{i} - 24\vec{j} + 384\,\vec{k}.$$

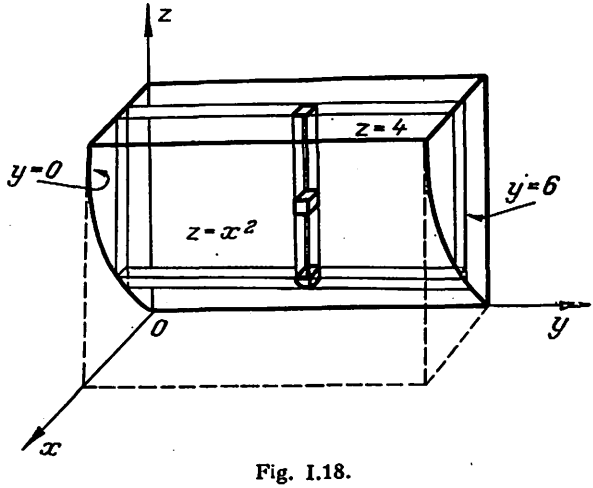


Fig. I.18.

3–c. 11

I.19. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[(x+y)\vec{i} + (1+z)\vec{j} + (2x+2xy+z)\vec{k}\right]$$

prin porţiunea de suprafaţă $z = x^2 + y$ pe care o taie cilindrul cu baza un sfert din coroana circulară în planul xOy din fig. I.19, cu generatoarele paralele cu Oz.

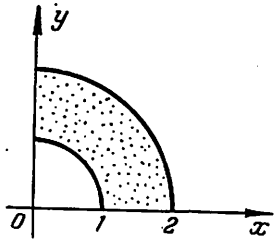


Fig. I.19

R.

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

Ecuaţia parametrică a suprafeţei date este

$$x = u,\ y = v,\ z = u^2 + v.$$

Elementul de suprafaţă este

$$d\sigma = \sqrt{4u^2+2}\,du\,dv,$$

iar versorul normalei la suprafaţă este

$$\vec{n} = \frac{-2u}{\sqrt{4u^2+2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{4u^2+2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{4u^2+2}}\vec{k}.$$

Rezultă

$$\vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma = \frac{(u+v)\vec{i} + (u^2+v+1)\vec{j} + (3u^2+2uv+v)\vec{k}}{\sqrt{u^2+v^2}}(-2u\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})\,du\,dv =$$

$$= -\frac{du\,dv}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Deci

$$\Phi = -\iint_{D} \frac{du\,dv}{\sqrt{u^2+v^2}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 d\rho = -\frac{\pi}{2},$$

unde $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$.

I.20. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v} = (z-x)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + 2z\vec{k}$$

spre exteriorul tetraedrului $OABC$ cu $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$. $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, (fig. I.20).

Să se verifice rezultatul aplicînd formula Gauss-Ostrogradski.

R. Avem

$$\Phi = \iint\limits_{OABCO} \vec{v}\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{OAB} \vec{v}\vec{n}\,d\sigma + \iint\limits_{OBC} \vec{v}\vec{n}\,d\sigma + \iint\limits_{OAC} \vec{v}\vec{n}\,d\sigma + \iint\limits_{ABC} \vec{v}\vec{n}\,d\sigma.$$

Normala la fața OAB este îndreptată spre exteriorul tetraedrului, adică, în jos, deci $\vec{n}_{OAB} = -\vec{k}$. Rezultă

$$\Phi_{OAB} = \iint\limits_{OAB} \vec{v}\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{OAB} -2z\,d\sigma = 0,$$

deoarece pe OAB avem $z = 0$.

Pentru fața OBC avem $\vec{n}_{OBC} = -\vec{i}$, deci

$$\Phi_{OBC} = \iint\limits_{OBC} (x - z)\,d\sigma.$$

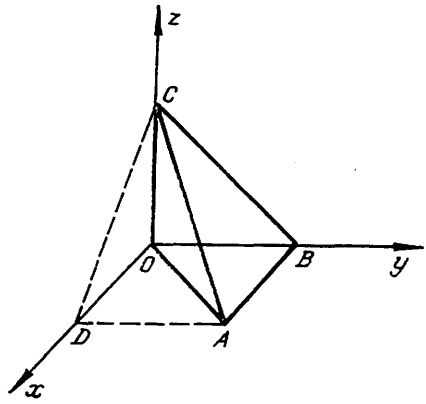


Fig. 1.20

Pe OBC avem $x = 0$, de unde

$$\Phi_{OBC} = \iint\limits_{OBC} -z\,dy\,dz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} -z\,dz = -\frac{1}{6}.$$

Ecuația planului OAC este $y - x = 0$. Trebuie determinat care anume față a planului este exterioară tetraedrului. Punctul $B(0, 1, 0)$ se află situat în raport cu planul OAC de aceeași parte cu interiorul tetraedrului; pe de altă parte coordonatele sale, înlocuite în ecuația planului, dau un rezultat pozitiv:

$$F(x, y, z)_B = |y - x|_B = 1 > 0.$$

În consecință, pentru a avea normala exterioară, vom înmulți ecuația planului OAC cu -1:

$$(OAC): x - y = 0.$$

Rezultă

$$\vec{n}_{OAC} = \frac{\operatorname{grad}(x - y)}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}.$$

Avem

$$\Phi_{OAC} = \iint\limits_{OAC} \vec{v}\,\vec{n}_{OAC}\,d\sigma = \iint\limits_{OAC} \frac{z+y-2x}{\sqrt{2}}\,d\sigma.$$

Proiectînd OAC pe planul yOz, obținem

$$\Phi_{OAC} = \iint\limits_{OBC} (z-y)\,dy\,dz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (z-y)\,dz = 0.$$

Ecuația planului ABC este

$$y + z - 1 = 0;$$

fața exterioară este cea pozitivă, deci

$$\vec{n}_{ABC} = \frac{\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{2}}.$$

Avem, proiectînd pe planul xOy,

$$\Phi_{ABC} = \iint\limits_{ABC} \frac{x-y+2z}{\sqrt{2}}\,d\sigma = \iint\limits_{OAB} (x-3y+2)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y (x-3y+2)\,dx = \frac{1}{6}.$$

Fluxul total este deci

$$\Phi = 0.$$

Aplicînd formula lui Gauss-Ostrogradski, avem

$$\Phi = \iint\limits_{OABC} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{v}\,d\omega.$$

Avem

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(z-x) + \frac{\partial}{\partial y}(x-y) + \frac{\partial}{\partial z}(2z) = 0,$$

în consecință

$$\Phi = 0.$$

I.21. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial definit prin vectorul $\vec{v} = z\vec{i} + x\vec{j} - 3yz\vec{k}$ prin suprafața limitată de planele de coordonate, planul $z = 5$ și sfertul de cilindru $x^2 + y^2 = 16$ din primul octant al sistemului de coordonate.

R. Avem

$$\Phi = \iint\limits_{\Sigma} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

Proiectăm suprafața (Σ) pe planul (xOz) ca în fig. I.21 Avem

$$\iint_{\Sigma} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\Sigma'} \vec{v}\,\vec{n}\,\frac{dx\,dz}{|\vec{n}\,\vec{j}|}.$$

Normala la $x^2 + y^2 = 16$ este $\vec{\nabla}(x^2 + y^2) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$, atunci

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{4}.$$

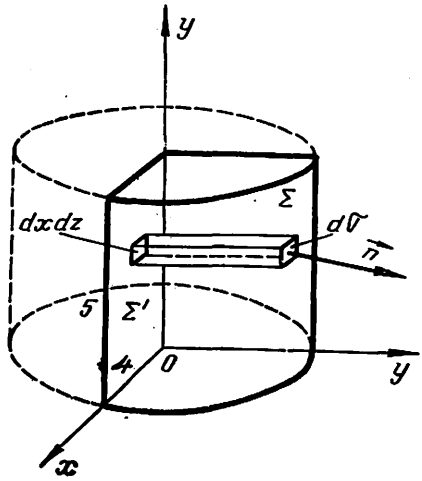


Fig. I.21

Rezultă

$$\vec{v}\,\vec{n} = (z\vec{i} + x\vec{j} - 3yz\vec{k})\cdot\frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{4} = \frac{1}{4}(xz + xy),$$

$$\vec{n}\,\vec{j} = \frac{y}{4},$$

de unde

$$\iint_{\Sigma'} \frac{xz + xy}{y}\,dx\,dz = \int_0^5\int_0^4 \left(\frac{xz}{\sqrt{16 - x^2}} + x\right)dx\,dz = \int_0^5 (4z + 8)\,dz = 90.$$

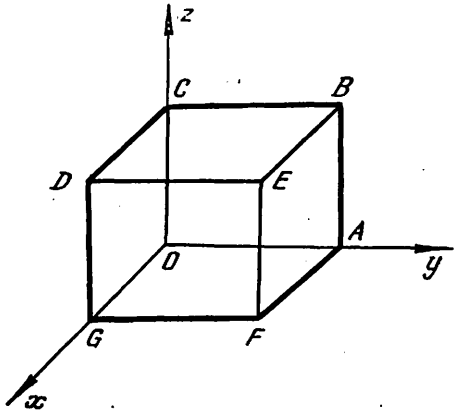


Fig. I.22

I.22. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial definit prin vectorul $\vec{v} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ prin suprafața cubului mărginit de $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$, (fig I.22).

R. Avem

$$\text{flux}_{(OABCDEFGO)}\,\vec{v} = \text{flux}_{(ABCD)}\,\vec{v} + \text{flux}_{(ABEF)}\,\vec{v} + \text{flux}_{(BCDE)}\,\vec{v} + \text{flux}_{(AFGO)}\,\vec{v} +$$

$$+ \text{flux}_{(OGDC)}\,\vec{v} + \text{flux}_{(DEFG)}\,\vec{v}.$$

Pe fața $ABCO$, $\vec{n} = -\vec{i}$, $x = 0$, deci

$$\text{flux}_{(ABCO)}\,\vec{v} = \iint\limits_{ABCO} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma = \int_0^1\int_0^1 (-y^2\vec{j} + yz\vec{k})(-\vec{i})\,dy\,dz = 0.$$

Pe fața $ABEF$, $\vec{n} = \vec{j}$, $y = 1$, de unde

$$\text{flux}_{(ABEF)}\,\vec{v} = \iint\limits_{ABEF} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma = \int_0^1\int_0^1 \vec{j}(4xz\vec{i} - \vec{j} + z\vec{k})\,dx\,dz = -1.$$

Pe fața $(BCDE)$, $\vec{n} = \vec{k}$, $z = 1$, deci

$$\text{flux}_{(BCDE)}\,\vec{v} = \iint\limits_{BCDE} \vec{v}\,\vec{n}\,d\sigma = \int_0^1\int_0^1 (4x\vec{i} - y^2\vec{j} + y\vec{k})\,\vec{k}\,dx\,dy = \frac{1}{2}.$$

Pe $(AFGO)$, $\vec{n} = -\vec{k}$, $z = 0$, de unde

$$\text{flux}_{(AFGO)}\,\vec{v} = \int_0^1\int_0^1 (-y^2\vec{j})(-\vec{k})\,dx\,dy = 0.$$

Pe $(OGDC)$, $\vec{n} = -\vec{j}$, $y = 0$, deci

$$\text{flux}_{(OGDC)}\,\vec{v} = \int_0^1\int_0^1 (4xz\,\vec{i})(-\vec{j})\,dx\,dz = 0,$$

iar pe fața $(DEFG)$, $\vec{n} = \vec{i}$, $x = 1$, de unde

$$\text{flux}_{(DEFG)}\,\vec{v} = \int_0^1\int_0^1 (4z\,\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\,\vec{k})\cdot\vec{i}\cdot dydz = \int_0^1\int_0^1 4z\,dydz = 2.$$

Fluxul total este

$$\Phi = \frac{3}{2}.$$

I.23. Se consideră punctele fixe O și A și un punct mobil P. Se consideră vectorul $\vec{v} = (\vec{a}\cdot\vec{r})\,(\vec{a}\times\vec{r})$, unde $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

1°. Să se calculeze circulația cîmpului vectorial $\vec{v}$ pe un cerc (Γ) cu centrul A cuprins într-un plan perpendicular pe $\overrightarrow{OA}$.

2° Să se calculeze fluxul aceluiași cîmp vectorial prin interiorul unui cerc de diametrul OA.

R. 1° Circulația cîmpului vectorial $\vec{v}$ pe cercul (Γ) este

$$\int_\Gamma \vec{v}\,d\vec{r}.$$

Avem

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \overrightarrow{AP},$$

deci pe (Γ)

$$\vec{a}\,\vec{r} = a^2 \text{ și } |\vec{a}\times\vec{r}| = a\rho,$$

ρ fiind raza cercului (Γ), de unde rezultă

$$\int_\Gamma (\vec{a}\cdot\vec{r})\,(\vec{a}\times\vec{r})\,d\vec{r} = a^3\rho\int_\Gamma ds = 2\pi\rho^2a^3.$$

2° În planul cercului de diametru OA avem

$$\vec{a}\,\vec{r} = ar\cos\theta,\ \vec{a}\times\vec{r} = \vec{n}\,ar\sin\theta,$$

$\vec{n}$ fiind versorul normalei la plan iar θ unghiul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{r}$.

Fluxul este

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{v}\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\left(\int_0^{a\cos\theta} r^3\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = 0.$$

I.24. Să se determine soluţiile ecuaţiei Poisson $\Delta F = f(r)$ de forma $F = F(r)$, funcţia $f(r)$ fiind dată, iar r fiind modulul vectorului de poziţie. Aplicaţie: $f(r) = r^n$.

R. Expresia laplacianului în coordonate sferice este

$$\Delta F = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right).$$

Ţinînd seama de faptul că $F = F(r)$, ecuaţia lui Poisson se scrie

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right) = f(r)$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} = f(r).$$

Cu schimbarea de funcţie $F(r) = \dfrac{\psi(r)}{r}$ se obţine ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}r^2} = rf(r)$$

cu soluţia

$$= \int\left(\int rf(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}r + c_1r + c_2,\ (c_1,\ c_2 = \text{const}),$$

deci

$$F(r) = \frac{1}{r}\int\left(\int rf(r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}r + c_1 + \frac{c_2}{r}.$$

Pentru $f(r) = r^n$ se obține

$$\psi(r) = \frac{r^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + c_1 r + c_2,$$

iar

$$F(r) = \frac{r^{n+2}}{(n+2)(n+3)} + \frac{c_2}{r} + c_1.$$

I.25. Utilizînd relația $(\mathrm{rot}\,\vec{v})\vec{n} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\int_\Gamma \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r}}{\Delta s}$, să se exprime $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ în coordonate curbilinii ortogonale.

R. Vom calcula $(\mathrm{rot}\,\vec{v})\,\vec{u}_1$. Să considerăm o suprafață (S_1) normală la $\vec{u}_1$ în P (fig. I.25) și vom nota cu (Γ_1) frontiera lui (S_1). Fie

$$\vec{v} = v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3.$$

Avem

$$\int_\Gamma \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{PQ} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int_{QL} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int_{LM} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int_{MP} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

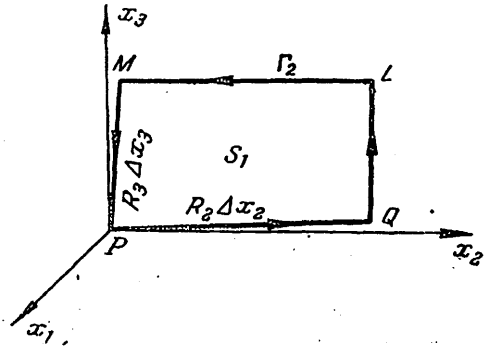


Fig. I.25

Prin aproximare avem

$$\int_{PQ} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\Big|_P \cdot (R_2\Delta x_2\,\vec{u}_2) = (v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3)\,(R_2\Delta x_2\vec{u}_2) = v_2 R_2 \Delta x_2.$$

Atunci

$$\int_{ML} \vec{v}\, d\vec{r} = v_2 R_2 \Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2 \Delta x_2)\Delta x_3$$

sau

$$\int_{LM} \vec{v}\, d\vec{r} = -v_2 R_2 \Delta x_2 - \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2 \Delta x_2)\Delta x_3.$$

Similar

$$\int_{PM} \vec{v}\, d\vec{r} = \vec{v}\Big|_P (R_3 \Delta x_3 \vec{u}_3) = v_3 R_3\, \Delta x_3 \text{ sau } \int_{MP} \vec{v}\, d\vec{r} = -v_3 R_3 \Delta x_3$$

și

$$\int_{QL} \vec{v}\, d\vec{r} = v_3 R_3 \Delta x_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}(v_3 R_3\, \Delta x_3)\Delta x_2.$$

Adunînd aceste relații, obținem

$$\int_{\Gamma_1} \vec{v}\, d\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x_2}(v_3\, R_3 \Delta x_3)\Delta x_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2 \Delta x_2)\Delta x_3 = \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(v_3 R_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2)\right]\Delta x_2 \Delta x_3,$$

lăsînd la o parte termenii infinitezimali de ordin mai mare ca $\Delta x_2 \Delta x_3$.

Împărțind prin aria (S_1) egală cu $R_2 R_3 \Delta x_2 \Delta x_3$ și trecînd la limită cînd $\Delta x_2 \to 0$ și $\Delta x_3 \to 0$, avem

$$(\text{rot}\, \vec{v})\, \vec{u}_1 = -\frac{1}{R_2 R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(v_3\, R_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2)\right].$$

Analog, considerînd suprafețele (S_2) și (S_3) perpendiculare în P la $\vec{u}_2$, respectiv $\vec{u}_3$, găsim $(\text{rot}\, \vec{v})\vec{u}$ și $(\text{rot}\, \vec{v})\vec{u}_3$.

Deci

$$\text{rot}\, \vec{v} = \frac{1}{R_2 R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(v_3 R_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(v_2 R_2)\right]\vec{u}_1 + \frac{1}{R_1 R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(v_1 R_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(v_3 R_3)\right]\vec{u}_2 +$$

$$+ \frac{1}{R_1 R_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(v_2 R_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(v_1 R_1)\right]\vec{u}_3.$$

I.26. Fie $\vec{v}(x, y, z)$ o funcție vectorială și $F(x, y, z)$ o funcție scalară.

Să se determine elementul de lungime ds și expresiile pentru grad F, div $\vec{v}$, rot $\vec{v}$ și ΔF în:

1° sistemul de coordonate al elipsoidului de rotaţie alungit;
2° în sistemul de coordonate al elipsoidului de rotaţie turtit.

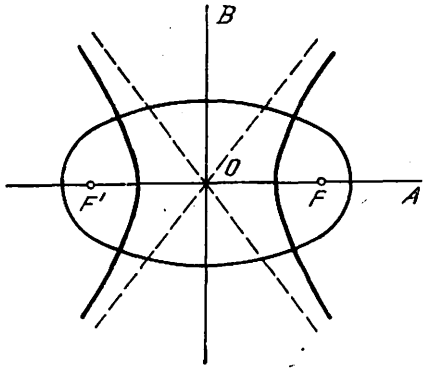


Fig. I.26

R. 1° Rotind figura I.26 în jurul axei OA, elipsele şi hiperbolele omofocale descriu respectiv, elipsoizi de rotaţie alungiţi şi hiperboloizi de rotaţie cu două pînze, ortogonali, care formează primele două familii de suprafeţe de coordonate. O altă familie este constituită din plane care trec prin axa de rotaţie. Luînd axele Ox, Oy, Oz pe OA, OB, OC (perpendiculara în O pe planul OAB), ecuaţiile suprafeţelor de coordonate în cele două sisteme se scriu:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\,\mathrm{sh}^2\xi}+\frac{z^2}{a^2\,\mathrm{ch}^2\,\xi}-1=0,\quad \xi=\mathrm{const};$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\sin^2\varphi}-\frac{z^2}{a^2\cos^2\varphi}+1=0,\quad \varphi=\mathrm{const};$$

$$\frac{x}{y}=\mathrm{tg}\,\psi,\quad \psi=\mathrm{const}.$$

Dacă se limitează variaţiile coordonatelor la intervalele

$$0\leqslant\zeta<+\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi,$$

punctele spaţiului sînt descrise o singură dată.

Coordonatele ξ, φ, ψ sînt definite de ecuaţiile

$$x=a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi\sin\psi,\quad y=a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi\cos\psi,\quad z=a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi.$$

Elementul de lungime va fi

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = a(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)\,[(d\xi)^2 + (d\varphi)^2] + a\,\mathrm{sh}^2\xi\,\sin^2\varphi\,(d\psi)^2.$$

Parametrii lui Lamé sînt

$$R_1 = R_\xi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}\right| = a(\mathrm{ch}^2\,\xi - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}},\quad R_2 = R_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = R_\xi,$$

$$R_3 = R_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi}\right| = a\,\mathrm{sh}\,\xi\,\sin\varphi.$$

Pentru grad F înlocuind în relaţia care dă gradientul într-un sistem de coordonate curbilinii ortogonale

$$\mathrm{grd}\,F = \frac{1}{R_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\vec{u}_1 + \frac{1}{R_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\vec{u}_2 + \frac{1}{R_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\vec{u}_3,$$

parametrii lui Lamé şi coordonatele x_1, x_2, x_3, obţinem

$$\mathrm{g\,rad}\,F = \frac{1}{a\lambda}\frac{\partial F}{\partial \xi}\vec{u}_\xi + \frac{1}{a\lambda}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{1}{a\,\mathrm{sh}\,\xi\,\sin\varphi}\frac{\partial F}{\rho\psi}\vec{u}_\psi,$$

unde $\lambda = (\mathrm{ch}^2\,\xi - \cos^2\varphi)^{1/2}$ iar $\vec{u}_\xi$, $\vec{u}_\varphi$, $\vec{u}_\psi$ sînt versorii noului sistem de coordonate.

Avem

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{R_1R_2R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(R_2R_3v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(R_1R_3v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(R_1R_2v_3)\right],$$

deci în cazul sistemului (1) de coordonate rezultă

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{a\lambda^2}\left(\frac{2\,\mathrm{sh}^2\,\xi + \sin^2\varphi}{\mathrm{th}\,\xi}\,v_\xi + \frac{2\sin^2\varphi + \mathrm{sh}^2\,\xi}{\mathrm{tg}\,\varphi}\,v_\varphi\right) +$$

$$+ \frac{1}{a\lambda}\left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{a\,\mathrm{sh}\,\xi\,\sin\varphi}\frac{\partial v_\psi}{\partial \psi}.$$

Din relaţia

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{R_1R_2R_3}\begin{vmatrix} R_1\vec{u}_1 & R_2\vec{u}_2 & R_3\vec{u}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ R_1v_1 & R_2v_2 & R_3v_3 \end{vmatrix}$$

rezultă în cazul sistemului (1):

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \left[\frac{1}{a\lambda}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}v_\psi + \frac{\partial v_\psi}{\partial\varphi}\right) - \frac{1}{a\operatorname{sh}\xi\sin\varphi}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\psi}\right]\vec{u}_\xi +$$

$$+\left[\frac{1}{a\operatorname{sh}\xi\sin\varphi}\frac{\partial v_\xi}{\partial\psi} - \frac{1}{a\lambda}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\xi}v_\psi + \frac{\partial v_\psi}{\partial\xi}\right)\right]\vec{u}_\varphi +$$

$$+\left[\frac{1}{a\lambda^3}(\operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\xi\, v_\varphi - \cos\varphi\sin\varphi\, v_\xi) + \frac{1}{a\lambda}\left[\frac{\partial v_\psi}{\partial\xi} - \frac{\partial v_\xi}{\partial\varphi}\right)\right]\vec{u}_\psi.$$

Din relația

$$\Delta F = \frac{1}{R_1R_2R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{R_2R_3}{R_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{R_1R_3}{R_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{R_1R_2}{R_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)\right]$$

rezultă

$$\Delta F = \frac{1}{a^2\lambda^2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\xi}\frac{\partial F}{\partial\xi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{\partial F}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{1}{a^2\operatorname{sh}^2\xi\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2}.$$

2° Dacă rotim figura I.31 în jurul axei OB se descriu elipsoizi de rotație turtiți de hiperboloizi de rotație cu o pînză ortogonali, care formează primele două familii de suprafețe de coordonate. A treia familie este formată din plane care trec prin axa de rotație. Luînd axele de coordonate OA, OB, OC, ecuațiile suprfețelor de coordonate sînt

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\operatorname{ch}^2\xi} + \frac{z^2}{a^2\operatorname{sh}^2\xi} - 1 = 0,\ \xi = \text{const};$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\cos^2\varphi} - \frac{z^2}{a^2\sin^2\varphi} - 1 = 0,\ \varphi = \text{const};$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg}\psi, \qquad \psi = \text{const},$$

iar ξ, φ, ψ sînt legate de coordonatele x, y, z prin relațiile

$$x = a\operatorname{ch}\xi\cos\varphi\sin\psi,\ y = a\operatorname{ch}\xi\cos\varphi\cos\psi,\ z = a\operatorname{sh}\xi\sin\varphi.$$

Parametrii lui Lamé vor fi în acest caz

$$R_\xi = R_\varphi = a(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}},\ R = a\operatorname{ch}\xi\cos\varphi.$$

Dacă ψ are o variaţie de amplitudine 2π iar $0 \leqslant \xi < +\infty$, $+\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ sau $-\infty < \xi < +\infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, toate punctele spaţiului sînt descrise o singură dată. Elementul de lungime va fi

$$ds^2 = a^2(\mathrm{ch}^2\,\xi - \cos^2\varphi)\,[(d\xi)^2 + (d\varphi)^2] + a^2\,\mathrm{ch}^2\,\xi\cos^2\varphi\,(d\psi^2).$$

Procedînd ca la punctul 1°, găsim

$$\mathrm{grad}\,F = \frac{1}{a\lambda}\frac{\partial F}{\partial \xi}\vec{u}_\xi + \frac{1}{a\lambda}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{1}{a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi}\frac{\partial F}{\partial \psi}\vec{u}_\psi,$$

unde $\lambda = (\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$,

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{a\lambda^3}\,[\mathrm{th}\,\xi(2\,\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\varphi)\,v_\xi + \mathrm{tg}\,\varphi\,(2\cos^2\varphi - \mathrm{ch}^2\xi)\,v_\varphi] +$$

$$+\frac{1}{a\lambda}\left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi}\frac{\partial v_\psi}{\partial \psi},$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \left[\frac{1}{a\lambda}\left(\frac{\partial v_\psi}{\partial \varphi} - \mathrm{tg}\,\varphi\,v_\psi\right) - \frac{1}{a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \psi}\right]\vec{u}_\xi +$$

$$+\left[\frac{1}{a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi}\frac{\partial v_\xi}{\partial \psi} - \frac{1}{a\lambda}\left(\frac{\partial v_\psi}{\partial \xi} + \mathrm{th}\,\xi\,v_\psi\right)\right]\vec{u}_\varphi +$$

$$+\left[\frac{1}{a\lambda^3}(\mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{ch}\,\xi\,v_\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\,v_\xi) + \frac{1}{a\lambda}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial v_\xi}{\partial \varphi}\right)\right]\vec{u}_\psi.$$

$$\Delta F = \frac{1}{a^2\lambda^2}\left(\mathrm{th}\,\xi\frac{\partial F}{\partial \xi} - \mathrm{tg}\,\varphi\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{1}{a^2\,\mathrm{ch}^2\,\xi\cos^2\varphi}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2}.$$

I.27. Să se arate că

$$\vec{v} = yz(2x + y + z)\vec{i} + zx(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$$

este un cîmp vectorial irotaţional şi să se determine funcţia de forţă a acestui cîmp.

R. Dacă scriem

$$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k},$$

avem

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} = z(2x + 2y + z),$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial y} = x(x + 2y + 2z),$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial z} = y(2x + y + 2z),$$

de unde rezultă rot $\vec{v} = 0$.

Determinarea funcției de forță a acestui cîmp revine la găsirea unei funcții $\varphi(x, y, z)$ astfel încît

$$\vec{v} = \text{grad}\, \varphi.$$

Aceasta conduce la rezolvarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = yz(2x + y + z),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = zx(x + 2y + z),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = xy\,(x + y + 2z).$$

Din prima ecuație a sistemului deducem

$$\varphi(x, y, z) = xyz\ (x + y + z) + f(y, z), \tag{1}$$

unde $f(y, z)$ este o funcție arbitrară de variabilele y, z.

Punînd condiția ca $\varphi(x, y, z)$ astfel determinată să verifice și ecuația a doua din sistem, găsim

$$xz(x + 2y + z) + \frac{\partial f}{\partial y} = xz(x + 2y + z),$$

de unde rezultă

$$f(y, z) = g(z)$$

unde $g(z)$ este o funcție arbitrară; deci:

$$\varphi(x, y, z) = xyz(x + y + z) + g(z).$$

Această funcție trebuie să verifice și ultima ecuație din sistem. Din această condiție rezultă

$$xy(x + y + 2z) + g'(z) = xy(x + y + 2z),$$

adică

$$g'(z) = 0,$$

de unde rezultă $g(z) = C$, ($C = \text{const}$).

Înlocuind aceste rezultate în (1), obținem

$$\varphi(x, y, z) = xyz(x + y + z) + C.$$

I.28. Să se arate că $\vec{v} = z\vec{u}_\rho + \rho\vec{u}_z$ este un cîmp vectorial irotațional și să se determine funcția de forță a cîmpului.

R. În sistemul de coordonate cilindrice avem

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \rho\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & \rho \end{vmatrix} = 0,$$

deci $\vec{v}$ este un cîmp vectorial irotațional și orice cîmp vectorial irotațional este gradientul unui cîmp scalar, deci

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Avem

$$d\varphi = \vec{v}\, d\vec{r} = (z\vec{u}_\rho + \rho\vec{u}_z)(\vec{u}_\rho d\rho + \rho\vec{u}_\theta\, d\theta + \vec{u}_z\, dz)$$

sau

$$d\varphi = z\, d\rho + \rho\, dz = d(\rho z)$$

de unde rezultă

$$\varphi = \rho z + c, \quad (c = \text{const}).$$

I.29. Se consideră triunghiul ABC dat prin vectorii $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ și vectorul $\vec{v} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{r}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{r})$.

1° Să se calculeze circulația cîmpului vectorial $\vec{v}$ pe conturul triunghiului.

2° Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial $\vec{v}$ prin suprafața care mărginește tetraedrul $OABC$.

3° Dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ formează un triedru tridreptunghic, $\vec{v}(P)$ este solenoidal. Să se determine un potențial vector al lui $\vec{v}$ de forma

$$\vec{u} = \alpha[(\vec{a}\vec{r})(\vec{b} \times \vec{r}) + (\vec{b}\vec{r})(\vec{c} \times \vec{r}) + (\vec{c}\vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})], \quad (\alpha = \text{const}).$$

R. 1° Aplicînd formula lui Stokes, obținem

$$\int_{\Gamma} \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \vec{v}\, \vec{n}\, d\sigma;$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{a} \operatorname{div} (\vec{b} \times \vec{r}) - (\vec{b} \times \vec{r}) \operatorname{div} \vec{a} + [(\vec{b} \times \vec{r})\vec{\nabla}]\vec{a} - (\vec{a}\vec{\nabla})(\vec{b} \times \vec{r}) =$$

$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}.$$

Deci

$$\int_{\Gamma} \vec{v}\, d\vec{r} = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}) \iint_{S_\Gamma} \vec{n}\, d\sigma = 2S^2,$$

S fiind aria triunghiului ABC, iar $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = S$.

2° Pentru a calcula fluxul, aplicăm formula integrală a divergenței

$$\iint_{\Sigma} \vec{v}\, \vec{n}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v}\, d\omega.$$

Dar

$$\operatorname{div} \vec{v} = -2[\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a}], \tag{1}$$

deci

$$\Phi = -2(\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a}) \iiint_{\Omega} d\omega = -3(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})(\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a}).$$

3° Dacă $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formează un triedru tridreptunghic, din (1) rezultă $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Pentru ca $\vec{u}$ să fie potențial vector al lui $\vec{v}$, trebuie să avem

$$\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{u}.$$

Avem

$$\operatorname{rot} \vec{u} = 3\alpha[\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{r}) + \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{r}) + \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{r})] =$$

$$= 3\alpha[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{r}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{r})] = 3\alpha\vec{v}.$$

deoarece $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c} = 0$. Rezultă $\alpha = 1/3$.

I.30. Se consideră cîmpul vectorial

$$\vec{v}(M) = \int_{\Gamma} \frac{d\vec{r}_P}{r},$$

unde $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$, iar Γ o curbă simplă închisă descrisă de P.

1° Să se exprime $\vec{v}(M)$ printr-o integrală de suprafaţă şi să se calculeze divergenţa şi rotorul acestui cîmp.

2° Să se determine un potenţial vector $\vec{u}$ al lui $\vec{v}$.

R. 1° Vom transforma integrala care dă proiecţia lui $\vec{v}$ pe o direcţie oarecare $\vec{a}$ cu ajutorul formulei lui Stokes. Avem

$$\vec{a}\,\vec{v}(M) = \int_{\Gamma} \frac{\vec{a}}{r}\, d\vec{r}_P = \iint_S \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{a}}{r}\right) \vec{n}\, d\sigma = \iint_S \frac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^3}\, \vec{n}\, d\sigma = \vec{a} \iint_S \frac{\vec{r}\times\vec{n}}{r^3}\, d\sigma,$$

de unde rezultă

$$\vec{v}(M) = \iint_S \frac{\vec{r}\times\vec{n}}{r^3}\, d\sigma;$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(M) = \iint_S \vec{\nabla}_M \left(\frac{\vec{r}\times\vec{n}}{r^3}\right) d\sigma = \iint_S \operatorname{rot}_M \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}\, \vec{n}\, d\sigma = 0;$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(M) = \iint_S \left(\vec{\nabla}_M \times \frac{\vec{r}\times\vec{n}}{r^3}\right) d\sigma = \iint_S \left[(\vec{n}\vec{\nabla}_M)\frac{\vec{r}}{r^3} - \left(\vec{\nabla}_M \frac{\vec{r}}{r^3}\right)\vec{n}\right] d\sigma =$$

$$= \iint_S (\vec{n}\vec{\nabla}_M)\frac{\vec{r}}{r^3}\, d\sigma, \text{ deoarece } \operatorname{div}_M \frac{\vec{r}}{r^3} = 0.$$

2° Pentru a determina un potenţial vector al cîmpului $\vec{v}$, observăm că $\vec{n}\, d\sigma$ este constant în raport cu M şi din $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$ rezultă $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} = \operatorname{grad}_M \frac{1}{r}$, $\left(\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\overrightarrow{MP}}{MP^3} = -\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)$.

Avem

$$\vec{v}(M) = \iint_S \operatorname{grad}_M \frac{1}{r} \times \vec{n}\, d\sigma = \operatorname{rot}_M \iint_S \frac{1}{r}\, \vec{n}\, d\sigma,$$

deci potenţialii vectori au forma

$$\vec{u}(M) = \iint_S \frac{1}{r} n \, d\sigma + \operatorname{grad} f(M).$$

Notînd cu ω unghiul solid sub care se vede suprafaţa (S) din punctul M şi calculînd gradientul lui ω, avem

$$\operatorname{grad} \omega(M) = \iint_S \vec{\nabla}_M \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \vec{n} \right) d\sigma = \iint_S \left[\vec{n} \times \operatorname{rot}_M \frac{\vec{r}}{r^3} + (\vec{n}\vec{\nabla}_M) \frac{\vec{r}}{r^3} \right] d\sigma =$$

$$= \iint_S (\vec{n}\vec{\nabla}_M) \frac{\vec{r}}{r^3} \, d\sigma = \operatorname{rot} \vec{v}(M).$$

Din punct de vedere electromagnetic, aceasta corespunde faptului că rot $\vec{v}$ care reprezintă cîmpul magnetic se exprimă direct în funcţie de unghiul solid sub care se vede din M curba pe care circulă curentul.

I.31. 1° Să se determine un potenţial vector al cîmpului electrostatic $\vec{v} = \frac{a \cdot \vec{r}}{r^3}$ şi să se stabilească legătura lui $\vec{v}$ cu unghiul solid sub care se vede o suprafaţă (S) de frontieră (Γ).

2° Să se calculeze potenţialul vector al aceluiaşi cîmp, tangent conului $\theta = \text{const}$.

R. 1° Calculînd

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \left(a \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{-3a}{r^3} + \frac{3a}{r^3} = 0,$$

rezultă că $\vec{v}$ este rotorul unui cîmp vectorial $\vec{w}$, deci

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \frac{a}{r^3} (x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}). \tag{1}$$

O soluţie particulară a ecuaţiei $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$ se obţine luînd $\vec{w}_3 = 0$. Din (1) identificînd, avem

$$-\frac{\partial w_2}{\partial z} = \frac{ax}{r^3},$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{ay}{r^3},$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{az}{r^3}.$$

Din prima ecuaţie a sistemului rezultă

$$w_2 = -\int_{z_0}^{z} \frac{ax}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz + f(x, y) = -\frac{axz}{r(x^2+y^2)} + f(x, y) \cdot \tag{2}$$

iar din ecuaţia a doua deducem

$$w_1 = \int_{z_0}^{z} \frac{ay}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz + g(x, y) = \frac{ayz}{r(x^2+y^2)} + g(x, y). \tag{3}$$

Soluţia particulară este

$$\vec{w} = \frac{az}{r(x^2+y^2)}(y\vec{i} - x\vec{j}) = \frac{az}{x^2+y^2}\,\frac{\vec{r}\times\vec{k}}{r},$$

unde am luat $f = g = 0$. Aceasta este posibil deoarece, înlocuind în ultima ecuaţie a sitemului pe w_1 şi w_2 daţi de (2) şi (3), obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

care este satisfăcută şi de $f = g = 0$.

Prin permutări circulare se obţin soluţii analoge, astfel pentru $w_1 = 0$ se obţine soluţia

$$\vec{w} = \frac{ax}{x^2+y^2}\,\frac{\vec{r}\times\vec{i}}{r},$$

iar pentru $w_2 = 0$

$$\vec{w} = \frac{ay}{x^2+y^2}\,\frac{\vec{r}\times\vec{j}}{r}.$$

Unghiul solid sub care se vede suprafaţa (S) este

$$\omega = \iint_S \frac{\vec{r}\,\vec{n}}{r^3}\,d\sigma$$

care este tocmai fluxul cîmpului electrostatic cu $a = 1$. Unghiul solid este independent de (S) şi depinde numai de (Γ), în virtutea teoremei lui Stokes

$$\omega = \int_\Gamma \vec{w}\,d\vec{r}.$$

2° Vom rezolva problema, utilizînd sistemul de coordonate sferice. În acest sistem

$$\vec{v} = \frac{a}{r^2}\vec{u}_r.$$

Pentru a determina potenţialul vector cu $w_\theta = 0$, scriem ecuaţia $\vec{v} = \text{rot}\,\vec{w}$ în coordonate sferice

$$\frac{a}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & r\sin\theta\vec{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ w_r & 0 & r\sin\theta w_\varphi \end{vmatrix},$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\, w_\varphi) = a\sin\theta,$$

$$\frac{\partial w_r}{\partial\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial w_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\, w_\varphi) = 0.$$

Din primele două ecuaţii obţinem

$$r\sin\theta w_\varphi = -a\cos\theta + f(r, \varphi) \tag{4}$$

şi

$$w_r = g(r, \varphi), \tag{5}$$

unde f şi g sînt funcţii arbitrare derivabile.

Din ultima ecuaţie şi din (4) şi (5), obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial g}{\partial\varphi} = 0,$$

care este satisfăcută de soluţia particulară $f = g = 0$.

Potenţialul vector va fi

$$\vec{w} = -\frac{a}{r}\,\text{cotg}\,\theta\vec{u}_\varphi.$$

I.32. Fie $\vec{v} = yz(y+z)\vec{i} + xz(x+z)\vec{j} + xy(x+y)\vec{k}$. Să se determine suprafețele ortogonale liniilor de cîmp și să se scrie $\vec{v}$ sub forma $\vec{v} = \lambda \operatorname{grad} F$.

R. Avem

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 2x(y-z)\vec{i} + 2y(z-x)\vec{j} + 2z(x-y)\vec{k}$$

și

$$\vec{v} \operatorname{rot} \vec{v} = 2xyz(y^2 - z^2) + 2xyz(z^2 - x^2) + 2xyz(x^2 - y^2) = 0,$$

deci cîmpul vectorial $\vec{v}$ este biscalar și admite o familie de suprafețe ortogonale liniilor de cîmp. Dacă într-un domeniu D există o suprafață (S) ortogonală liniilor de cîmp, în fiecare punct al suprafeței (S), rot $\vec{v}$ este tangent suprafeței, deci suprafețele ortogonale liniilor de cîmp trebuie căutate printre suprafețele de cîmp ale lui rot $\vec{v}$.

Liniile de cîmp ale lui rot $\vec{v}$ sînt soluțiile sistemului

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

și anume

$$x + y + z = C_1,\ xyz = C_2,\ (C_1,\ C_2 = \text{const}).$$

Dar

$$\operatorname{rot} \vec{v} \operatorname{grad}(x+y+z) = 0,\ \operatorname{rot} \vec{v} \operatorname{grad}(xyz) = 0,$$

deci în fiecare punct din D, vectorii $\vec{v}$, grad $(x+y+z)$, grad (xyz) sînt coplanari, deoarece sînt perpendiculari pe rot $\vec{v}$. Putem descompune $\vec{v}$ după direcțiile vectorilor grad $(x+y+z)$ și grad (xyz):

$$\vec{v} = \alpha \operatorname{grad}(x+y+z) + \beta \operatorname{grad}(xyz).$$

Calculînd gradienții și identificînd cu $\vec{v}$ dat inițial, obținem

$$\alpha = -xyz,\ \beta = x + y + z,$$

deci

$$\vec{v} = -xyz \operatorname{grad}(x+y+z) + (x+y+z) \operatorname{grad}(xyz).$$

Cu aceasta ecuația cu diferențiale totale $\vec{v}\, d\vec{r} = 0$ devine

$$(x+y+z)\, d(xyz) - (xyz)\, d(x+y+z) = 0.$$

Integrala generală a acestei ecuații este o funcție de C_1 și C_2 și anume

$$\frac{x+y+z}{xy} = C, \qquad (C = \text{const}).$$

Această ecuație reprezintă familia de suprafețe ortogonale liniilor de cîmp. Cîmpul vectorial se poate scrie sub forma

$$\vec{v} = \lambda \operatorname{grad} \frac{x+y+z}{xyz},$$

iar λ se determină prin identificare

$$\vec{v} = \lambda \frac{(xyz) \operatorname{grad}(x+y+z) - (x+y+z) \operatorname{grad}(xyz)}{(xyz)^2}.$$

Comparînd cu expresia de mai înainte, se obține $\lambda = -(xyz)^2$, deci

$$\vec{v} = -x^2y^2z^2 \operatorname{grad} \frac{x+y+z}{xyz}.$$

I.33. Să se determine suprafețele ortogonale liniilor de cîmp ale cîmpului vectorial definit prin vectorul

$$\vec{v} = z(1-e^y)\vec{i} + xze^y\vec{j} + x(1-e^y)\vec{k}.$$

R. Avem $\operatorname{rot}\vec{v} = -2xe^y\vec{i} + 2ze^y\vec{k}$. Rezultă.

$$\vec{v}\operatorname{rot}\vec{v} = -2xze^y + 2xze^y - 2xze^{2y} + 2xze^{2y} = 0,$$

deci $\vec{v}$ este un cîmp biscalar.

Liniile de vîrtej se obțin integrînd sistemul

$$\frac{dx}{-xe^y} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{ze^y}.$$

Se obține

$$xz = C_1, \; y = C_2, \; (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Cîmpul vectorial $\vec{v}$ se poate scrie sub forma

$$\vec{v} = \alpha \operatorname{grad}(xz) + \beta \operatorname{grad} e^y.$$

Comparînd expresia

$$\vec{v} = \alpha z\vec{i} + \beta e^y \vec{j} + x\alpha\vec{k}$$

cu vectorul $\vec{v}$ dat, rezultă

$$\alpha = 1 - e^y, \ \beta = xz,$$

deci, putem scrie

$$\vec{v} = (1 - e^y) \operatorname{grad}(xz) - xz \operatorname{grad}(1 - e^y). \tag{1}$$

Ecuația cu diferențiale totale $\vec{v}\,d\vec{r} = 0$ este

$$(1 - e^y)\, d(xz) - (xz)\, d(1 - e^y) = 0$$

cu soluția

$$\frac{1 - e^y}{xz} = C, \quad (C = \text{const}).$$

Această ecuație reprezintă familia de suprafețe ortogonale liniilor de cîmp al vectorilor $\vec{v}$. Cîmpul vectorial $\vec{v}$ se poate scrie

$$\vec{v} = \lambda \operatorname{grad} \frac{1 - e^y}{xz}.$$

Comparînd expresia

$$\vec{v} = \lambda \frac{(xz) \operatorname{grad}(1 - e^y) - (1 - e^y) \operatorname{grad}(xz)}{(xz)^2}$$

cu (1), rezultă $\lambda = -x^2z^2$, deci

$$\vec{v} = -x^2z^2 \operatorname{grad} \frac{1 - e^y}{xz}.$$

1.34. Să se arate că cîmpul vectorial definit de vectorul

$$\vec{v} = 2(\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{a} + 2(\vec{b}\,\vec{r})\,\vec{b} - \frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2 + (\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$$

este biscalar. Să se determine suprafețele ortogonale liniilor de cîmp și să se scrie $\vec{v}$ sub forma $\vec{v} = \lambda \operatorname{grad} F$.

R. Avem

$$\operatorname{rot} \vec{v} = -\frac{2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})^2}\left[(\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{a} + (\vec{b}\,\vec{r})\,\vec{b}\right] \times (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Scriem rot $\vec{v}$ sub forma

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \mu \vec{v}_1 \times (\vec{a} \times \vec{b}) \text{ cu } \mu = -\frac{2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})^2}, \quad \vec{v}_1 = (\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{a} + (\vec{b}\,\vec{r})\,\vec{b},$$

iar cîmpul vectorial $\vec{v}$ este de forma

$$\vec{v} = 2\vec{v}_1 + \lambda \vec{a} \times \vec{b}, \text{ unde } \lambda = -\frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2 + (\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}.$$

Rezultă

$$\vec{v} \operatorname{rot} \vec{v} = [2\vec{v}_1 + \lambda \vec{a} \times \vec{b}]\,[\mu \vec{v}_1 \times (\vec{a} \times \vec{b})] = 0,$$

deci $\vec{v}$ este un cîmp biscalar.

Ecuația vectorială a liniilor de vîrtej

$$\operatorname{rot} \vec{v} \times d\vec{r} = 0$$

sau

$$\mu[\vec{v}_1 \times (\vec{a} \times \vec{b})] \times d\vec{r} = 0$$

conduce la ecuațiile diferențiale vectoriale

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,d\vec{r}) = 0, \quad \vec{v}_1\, d\vec{r} = 0$$

cu soluțiile

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r}) = C_1 (\vec{a}\,\vec{r})^2 + (\vec{b}\,\vec{r})^2 = C_2, \quad (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Ecuația vectorială a suprafețelor ortogonale liniilor de cîmp

$$\vec{v}\, d\vec{r} = 0$$

se scrie

$$2[(\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{a} + (\vec{b}\,\vec{r})\,\vec{b}]\,d\vec{r} - \frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2 + (\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}(\vec{a} \times \vec{b})\,d\vec{r} = 0$$

sau

$$d[(\vec{a}\,\vec{r})^2 + (\vec{b}\,\vec{r})^2] - \frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2 + (\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}\, d(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r}) = 0.$$

Integrala generală a acestei ecuații este

$$\frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2 + (\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})} = C, \ (C = \text{const}).$$

Această ecuație reprezintă familia de suprafețe ortogonale liniilor de cîmp ale cîmpului $\vec{v}$. Cîmpul vectorial $\vec{v}$ se poate scrie sub forma

$$\vec{v} = \lambda \operatorname{grad} \frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2 + (\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}.$$

iar λ se determină prin identificare. Avem

$$\vec{v} = \lambda \left[\frac{2(\vec{a}\,\vec{r})\,\vec{a} + 2(\vec{b}\,\vec{r})\,\vec{b}}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})} - \frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2 + (\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}\, \vec{a} \times \vec{b} \right].$$

Comparînd cu expresia dată a lui $\vec{v}$, se obține

$$\lambda = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r}),$$

deci

$$\vec{v} = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r}) \operatorname{grad} \frac{(\vec{a}\,\vec{r})^2 + (\vec{b}\,\vec{r})^2}{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{r})}.$$

I.35. Să se determine potențialul vector al cîmpului magnetic produs de un curent.

R. Să considerăm o sarcină electrică e care se deplasează cu viteza $\vec{v}$; ea este echivalentă cu un element de curent electric de intensitate i și lungimea dl, astfel încît

$$i\,d\vec{l} = e\vec{v}. \tag{1}$$

Numărul i este pozitiv cînd curentul se deplasează în sensul pozitiv al vectorului $d\vec{l}$. Cîmpul produs la o distanță r de o particulă electrizată care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ este

$$\vec{H} = \frac{e\,\vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}.$$

În interiorul unui mediu magnetic apar magneţi elementari şi aceasta conduce la definirea unui vector inducţie magnetică $\vec{B}$, a cărui divergenţă este totdeauna nulă :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Să căutăm un potenţial vector al vectorului $\vec{B}$ astfel ca

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Se ştie că în vid

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

deci vectorul $\vec{A}$ va fi definit de

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

sau

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[e\vec{v} \times \vec{i} \frac{x}{r^3} + e\vec{v} \times \vec{j} \frac{y}{r^3} + e\vec{v} \times \vec{k} \frac{z}{r^3} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\vec{i} \times \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e\vec{v}}{r} \right) + \vec{j} \times \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e\vec{v}}{r} \right) + \vec{k} \times \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e\vec{v}}{r} \right) \right].$$

Comparînd acest rezultat cu

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{i} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \vec{j} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \vec{k} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}.$$

se deduce

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\vec{V}}{r}.$$

În cazul în care mişcarea particulelor încărcate se reduce la o translaţie (curentul într-un fir), dacă notăm cu $d\sigma$ un element din suprafaţa prin care trece un curent $\vec{i}$ şi cu $\vec{J}$ vectorul densitate de curent, avem $\vec{J} d\sigma = \vec{i}$ iar formula (1) ne dă imediat potenţialul vector al curentului într-un fir printr-o integrală extinsă la volumul firului considerat :

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J} d\omega}{r}.$$

I.36. Presupunînd că potenţialul vector $\vec{A}$ într-un punct P datorită unui curent i care se scurge într-un circuit închis (Γ) este dat prin

$$\vec{A} = i\int_{\Gamma} \frac{d\vec{r}}{r},$$

unde r este distanţa de la un element vectorial $d\vec{r}$ al curbei (Γ) la P, atunci cîmpul vectorial $\vec{H}$ în punctul P este dat de

$$\vec{H} = i\int_{\Gamma} \frac{d\vec{r} \times \vec{r}}{r^3}.$$

R. Avem

$$\vec{H} = \text{rot}\,\vec{A}.$$

Aplicînd operatorul diferenţial relativ la punctul P, obţinem

$$\vec{H} = \text{rot}\,\vec{A} = \text{rot}\left[i\int_{\Gamma} \frac{d\vec{r}}{r}\right] = i\int_{\Gamma} \text{rot}\left(\frac{d\vec{r}}{r}\right),$$

dar

$$\text{rot}\left(\frac{d\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\,\text{rot}\,d\vec{r} + \text{grad}\,\frac{1}{r} \times d\vec{r} = \frac{1}{r^3}\,d\vec{r} \times \vec{r}.$$

deoarece $\text{rot}\,d\vec{r} = 0$, rotorul fiind calculat în P.

Rezultă

$$\vec{H} = i\int_{\Gamma} \frac{d\vec{r} \times \vec{r}}{r^3}.$$

I.37. Dacă φ este o funcţie scalară de x, y, z, t şi satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\Delta\varphi,$$

să se arate că vectorii

$$\vec{E} = (\vec{k}\vec{\nabla})\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\vec{k},\quad \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\varphi \times \vec{k})$$

satisfac ecuaţiile lui Maxwell.

R. Avem

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\varphi \times \vec{k})\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\operatorname{rot}(\vec{\nabla}\varphi \times \vec{k})] =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\vec{k}\Delta\varphi + \frac{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial z}\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial^2(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial z\,\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial t}\vec{k}. \tag{1}$$

De asemenea

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[(\vec{k}\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\varphi) - \frac{1}{c^2}\vec{k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial^2(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial z\,\partial t} - \frac{1}{c^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\vec{k}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \text{ dacă } \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\Delta\varphi.$$

Similar

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{rot}\left[(\vec{k}\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\varphi) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\vec{k}\right] = \operatorname{rot}\left[\frac{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}{\partial t}\right] - \frac{1}{c^2}\operatorname{rot}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\vec{k}\right] =$$

$$= \operatorname{rot}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x}\vec{i} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y}\vec{j} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\vec{k}\right] - \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\operatorname{rot}\vec{k} + \vec{\nabla}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\times\vec{k}\right] =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\times\vec{k} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\varphi\times\vec{k})\right]$$

deoarece

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{\nabla}\varphi).$$

Rezultă

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

I.38. Să se determine potenţialul newtonian pentru o placă circulară omogenă $x^2 + y^2 = a^2$ în punctul $(0, 0, z)$.

R. Fie punctul $M(0, 0, z)$ și $P(\xi, \eta, 0)$ punctul mobil (fig. I.38). Avem

$$u(M) = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\mu}{r}\, d\sigma,$$

unde $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z^2}$.

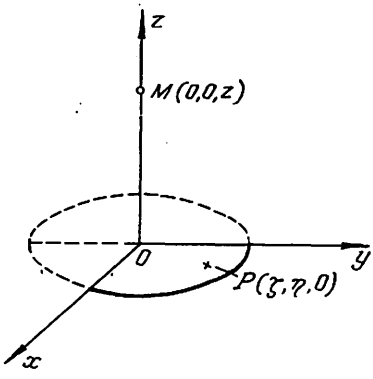


Fig. I.38

Cu transformarea $\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$, $0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, avem

$$u(M) = \mu \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{a} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = 2\pi\mu[\sqrt{a^2 + z^2} - z].$$

I. 39. Să se determine potențialul newtonian al jumătății superioare a sferei omogene $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ de densitate μ în punctul $M(0, 0, z)$, $z > a$.

R. Potențialul newtonian de volum corespunzător unei distribuții continue pe Ω = cu densitatea $\mu(P)$ este

$$u(M) = -\iiint\limits_{\Omega} \mu(P) \frac{d\omega_P}{r},$$

unde $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$.

Fie $P(\xi, \eta, \zeta)$. Avem $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (z - \zeta)^2}$ și μ = const, deci

$$u(M) = -\mu \iiint\limits_{\Omega} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (z - \zeta)^2}}.$$

Trecînd la coordonate sferice

$$\xi = \rho \sin \theta \cos \varphi, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant a,$$

$$\eta = \rho \sin \theta \sin \varphi, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\zeta = \rho \cos \theta, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

obținem

$$u(M) = -\mu \int\limits_0^a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin \theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2z\rho \cos \theta + z^2}} = -\frac{2\pi\mu}{z} \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} \frac{z\rho^2 \sin \theta\, d\theta\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2z\rho \cos \theta + z^2}} =$$

$$= -\frac{2\pi\mu}{z} \int\limits_0^a \rho(\sqrt{\rho^2 + z^2} - \rho - z)\, d\rho = \frac{2\pi\mu}{3z} \left[z^3 + a^3 + \frac{3}{2} a^2 z - (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Capitolul II

FUNCȚII DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

Mulțimea numerelor complexe este mulțimea perechilor ordonate de numere reale (x, y) care satisfac axiomele:

1) $(x, y) = (x', y') \leftrightarrows x = x', y = y'$;

2) $(1, 0) = 1$;

3) $k(x, y) = (x, y)k = (kx, ky)$;

4) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$;

5) $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.

Notăm $(0, 1) = \mathrm{i}$. Cu aceasta avem

$$(x, y) = x + \mathrm{i}y, \quad \mathrm{i}^2 = -1.$$

Numărul $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ se numește *conjugatul* numărului complex z. *Forma trigonometrică* a numărului complex este

$$z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

iar *forma exponențială*

$$z = \rho e^{\mathrm{i}\varphi},$$

unde *modulul* ρ și *argumentul* φ sînt dați de relațiile

$$\rho = |z| = (z\bar{z})^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \arccos\frac{x}{\rho} \\ \varphi &= \arcsin\frac{y}{\rho} \end{aligned}\right\}.$$

Două numere complexe z_1 şi z_2 sînt *egale* dacă

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \qquad (k = \text{const}).$$

Dacă avem două complexe $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, atunci

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 \pm i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$z_1^n = \rho_1^n(\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1),$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \rho_1^{\frac{1}{n}}\left[\cos \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right].$$

Fie $Z = f(z)$ o funcţie de variabila complexă $z = x + iy$. Avem

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

unde $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ sînt două funcţii reale de variabilele reale x, y.

O funcţie $f(z)$ se numeşte *uniformă* dacă unei valori date lui z îi corespunde o singură valoare pentru $f(z)$. O funcţie care nu este uniformă se numeşte *multiformă*.

Seria

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{1}$$

unde z este variabilă complexă iar a_k sînt constante complexe, se numeşte *serie întreagă* sau *serie de puteri*.

Teorema lui Abel. *Orice serie întreagă are un disc de convergenţă cu centrul în origine, raza R a discului depizînd de coeficienţii seriei. În punctele discului seria este absolut convergentă, iar în punctele exterioare circumferinţei este divergentă. În orice cerc plin $|z| \leqslant r < R$ seria este uniform convergentă.*

Teorema lui Cauchy-Hadamard. *Raza de convergenţă a seriei* (1) *este*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

sau

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

Teorema Abel. *Dacă a_k sînt numere reale pozitive şi raza de convergenţă a seriei este R, şi dacă $a_0 \geqslant a_1 R \geqslant a_2 R^2 \geqslant \ldots \geqslant a_n R^n \geqslant \ldots$* şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n R^n = 0$, *seria* (1) *este convergentă pe cercul de convergenţă, afară, eventual, de valoarea $z = R$.*

O serie de forma

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots,$$

unde a_k şi z_0 sînt constante complexe, se numeşte *serie Taylor.*

O serie de forma

$$\sum_{n=\mu}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

unde μ este un întreg oarecare, se numeşte *serie polară.* Dacă $\mu = -\infty$, seria se numeşte *serie Laurent.*

Fiind dat un domeniu D, o funcţie $f(z)$ definită univoc în fiecare punct din D se numeşte *funcţie olomorfă*, sau *analitică* în D, dacă ea este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul oricărui punct $z_0 \in D$.

O funcţie $f(z)$ definită univoc într-un domeniu D este *meromorfă* în acest domeniu, dacă în vecinătatea oricărui punct $z_0 \in D$ ea este reprezentabilă printr-o serie polară.

Punctele $z_0 \in D$ în care funcţia $f(z)$ este reprezentabilă printr-o serie polară cu $\mu < 0$ se numesc *poli* ai funcţiei $f(z)$, numărul $|\mu|$ fiind *ordinul* polului.

Funcţia $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ se numeşte *funcţie exponenţială.*

Funcţiile circulare $\sin z$ şi $\cos z$ sînt definite prin egalităţile

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Avem

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Funcţiile hiperbolice $\operatorname{sh} z$ şi $\operatorname{ch} z$ sînt definite de relaţiile

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Funcția $f(z)$ definită uniform într-un domeniu D din planul complex este *monogenă* în punctul $z_0 \in D$ dacă

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

există și este unic determinată.

O condiție necesară ca funcția $f(z)$ definită uniform în domeniul D să fie monogenă în punctul $z_0 \in D$ este ca funcțiile $P(x, y) = \mathrm{Re}[f(z)]$ și $Q(x, y) = \mathrm{Im}[f(z)]$, să admită derivate parțiale în punctul (x_0, y_0) și să verifice ecuațiile lui Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dacă funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ admit derivate parțiale de ordinul întîi continue în punctul (x, y), care verifică ecuațiile lui Cauchy-Riemann, funcția $f(x)$ este monogenă în punctul $z = x + iy$.

Funcțiile olomorfe într-un domeniu sînt monogene în acel domeniu și reciproc.

Dacă funcția $f(z)$ este monogenă într-un domeniu și dacă funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ admit în acest domeniu derivate parțiale de ordinul doi, aceste funcții sînt armonice în domeniu.

Fiind dată funcția $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ continuă pe un arc de curbă rectificabilă C, avem

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C P(x, y)\mathrm{d}x - Q(x, y)\mathrm{d}y + i\int_C Q(x, y)\mathrm{d}x + P(x, y)\mathrm{d}y.$$

Teorema lui Cauchy. *Integrala unei funcții monogene într-un domeniu simplu conex D de-a lungul unei curbe simple, închise, rectificabile C, situată în întregime în D, este nulă.*

Formula integrală a lui Cauchy. *Dacă $f(z)$ este o funcție olomorfă într-un domeniu D, C o curbă simplă închisă, rectificabilă și z_0 un punct din interiorul domeniului mărginit de C, atunci*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z.$$

În aceleași condiții avem

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

Fie funcţia $f(z) = (1 + z)^\alpha$, unde α este un număr complex oarecare iar pentru $f(z)$ considerăm ramura care în origine ia valoarea 1. Atunci în discul $|z| < 1$ avem

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots$$

Numărul $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz$, unde C este un cerc cu centrul în z_0, se numeşte *reziduul* funcţiei $f(z)$ relativ la punctul z_0 şi se notează

$$\operatorname*{Rez}_{z=z_0} f(z) \text{ sau } R_{z_0}.$$

Formula reziduului unui pol. Dacă $f(z)$ este o funcţie care are în punctul z_0 un pol de ordinul p, atunci

$$\operatorname*{Rez}_{z=z} f(z) = \frac{1}{(p-1)} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^p f(z)]^{p-1}.$$

Teorema reziduurilor (Cauchy). *Dacă C este o curbă simplă închisă, rectificabilă, în interiorul căreia o funcţie uniformă $f(z)$ are un număr finit de puncte singulare izolate $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, atunci*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{h=1}^{p} \operatorname*{Rez}_{z=\alpha_h} f(z).$$

Pentru calculul anumitor integrale definite, reale cu ajutorul teoriei reziduurilor, se folosesc următoarele leme :

Lema 1. *Fie AB un arc de pe cercul $|z| = R$, astfel încît*

$$\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta.$$

Dacă

$$\lim_{|z| \to \infty} zf(z) = k, \qquad (k = \text{const}),$$

atunci

$$\lim_{R \to \infty} \int_{AB} f(z)dz = i(\beta - \alpha)k.$$

Lema 2. *Fie AB un arc de pe cercul $|z - a| = R$, astfel încît*

$$\alpha \leqslant \arg(z - a) \leqslant \beta.$$

Dacă

$$\lim_{z \to 0} (z - a) f(z) = k, \qquad (k = \text{const}),$$

atunci

$$\lim_{R \to 0} \int_{AB} f(z) \mathrm{d}z = \mathrm{i}(\beta - \alpha) k.$$

O transformare biunivocă $u = f(z)$ se numeşte *conformă* dacă păstrează unghiurile, adică, dacă unghiul dintre două curbe oarecare din planul (x, y) este egal cu unghiul dintre curbele transformate din planul (u, v).

O funcţie monogenă care are derivata nenulă într-un domeniu D realizează o *transformare conformă* în acel domeniu.

O transformare conformă plană este realizată de o funcţie monogenă sau de una antimonogenă (funcţie a cărei conjugată este o funcţiemonogenă) care nu este constantă.

Transformarea

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0), \tag{2}$$

unde α, β, γ, δ sînt constante complexe, se numeşte *transformare liniară* sau *omografică*.

Un punct z se numeşte *punct dublu* sau *unit* al transformării (2) dacă este propriul său transformat adică, dacă $w = z$.

Orice transformare liniară se poate scrie sub forma

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}, \tag{2'}$$

dacă are punctele unite z_1 şi z_2 distincte, sau sub forma

$$\frac{1}{w - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + h, \tag{2''}$$

dacă are punctele unite confundate.

Transformările liniare se împart în următoarele clase :

1° transformările (2′) cu k = real se numesc *hiperbolice* ;

2° transformările (2′) cu $|k| = 1$, $(k \neq \pm 1)$, se numesc *eliptice* ;

3° transformările (2′) cu k nereal şi $|k| \neq 1$ se numesc *loxodromice* ;

4° transformările (2″) se numesc *parabolice*.

Transformarea lui Schwartz-Christoffel. Transformarea

$$w = \alpha \int_{z_0}^{z} (z - z_1)^{a_1 - 1} \ldots (z - z_n)^{a_n - 1} \, dz$$

reprezintă conform semiplanul superior din planul (z) pe interiorul unui poligon cu n laturi, cu unghiurile egale cu πa_k, din planul (w), cu $0 \leqslant a_i \leqslant 2$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = n - 2$.

PROBLEME

II.1. Să se calculeze numerele complexe:

1° $z_1 = \sin(2 - i)$; 2° $z_2 = \operatorname{ch}(1 + i)$; 3° $z_3 = i^{\sqrt{\pi}}$;

4° $z_4 = \operatorname{cotg}\left(\ln 2 + \frac{\pi i}{3}\right)$.

R. 1° Avem

$$z_1 = \sin 2 \cos i - \sin i \cos 2.$$

Avînd în vedere că

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

rezultă că

$$\sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i} = \frac{i(e^2 - 1)}{2e}, \quad \cos i = \frac{e + e^{-1}}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e},$$

adică

$$z_1 = \frac{1}{2e} [(e^2 + 1) \sin 2 + i(1 - e)^2 \cos 2].$$

2° Ținînd seama de formula

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

deducem

$$z_2 = \frac{e^{1+i} + e^{-(1+i)}}{2}.$$

Dar

$$e^i = \cos 1 + i \sin 1 \text{ și } e^{-i} = \cos 1 - i \sin 1,$$

deci

$$z_2 = \frac{e(\cos 1 + i \sin 1) + \dfrac{\cos 1 - i \sin 1}{e}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2e}\,[(e^2 + 1)\cos 1 + i(e^2 - 1)\sin 1].$$

3° Aplicînd logaritmii egalităţii $z_3 = i^{\sqrt{\pi}}$, obţinem

$$\ln z_3 = \sqrt{\pi}\ln i = \sqrt{\pi}\ln\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right) = \pi^{3/2}\left(2k + \frac{1}{2}\right)i,$$

deci

$$z_3 = e^{\pi^{3/2}\left(2k+\frac{1}{2}\right)i}\ ; \quad (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

4° Se ştie că

$$\operatorname{cotg} z = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}},$$

deci

$$z_4 = i\,\frac{e^{i\left(\ln 2+\frac{\pi i}{3}\right)} + e^{-i\left(\ln 2+\frac{\pi i}{3}\right)}}{e^{i\left(\ln 2+\frac{\pi i}{3}\right)} - e^{-i\left(\ln 2+\frac{\pi i}{3}\right)}}$$

Dar

$$e^{i\left(\ln 2+\frac{\pi i}{3}\right)} = e^{i\ln 2}\,e^{-\frac{\pi}{3}} = 2^i\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right).$$

de unde

$$z_5 = i\,\frac{2^i\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2^i\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right)}}{2^i\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{2^i\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right)}} =$$

$$= \frac{2^{2i}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right)^2 + 1}{2^{2i}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sh}\frac{\pi}{3}\right)^2 - 1}.$$

II.2. Să se determine expresiile lui $|\sin z|$ și $|\cos z|$ și să se demonstreze apoi că dacă $-\pi < a < \pi$ și n este un număr natural, avem

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y} \text{ pentru } z = \frac{2n+1}{2} + iy$$

și

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)a}{2}}{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi}{2}}, \text{ pentru } z = x + \frac{2n+1}{2}i.$$

R. Avem

$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$, de unde, ținînd cont de relația $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$, obținem

$$|\sin z| = (\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y)^{1/2}.$$

Analog, din

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

avem

$$|\cos z| = (\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y)^{1/2}.$$

Dacă $z = \frac{2n+1}{2} + iy$, avem

$$|\sin az|^2 = \sin^2 \frac{(2n+1)a}{2} + \operatorname{sh}^2 ay = \operatorname{ch}^2 ay - \cos^2 \frac{(2n+1)a}{2} \leqslant \operatorname{ch}^2 ay,$$

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} + \operatorname{sh}^2 \pi y = 1 + \operatorname{sh}^2 \pi y = \operatorname{ch}^2 \pi y,$$

de unde

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right|^2 \leqslant \left(\frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y}\right)^2$$

și, avînd în vedere că $-\pi < a < \pi$, rezultă

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y}.$$

Pentru $z = x + \frac{2n+1}{2}i$, avem

$$|\sin az|^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{(2n+1)a}{2} - \cos^2 ax \leqslant \operatorname{ch}^2 \frac{(2n+1)a}{2}$$

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \operatorname{sh}^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} \geqslant \operatorname{sh}^2 \frac{(2n+1)\pi}{2},$$

deci

$$\left| \frac{\sin az}{\sin \pi z} \right|^2 \leqslant \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)a}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2}} \right],$$

de unde

$$\left| \frac{\sin az}{\sin \pi z} \right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)a}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2}}.$$

II.3. Să se rezolve ecuațiile

1° $\sin z = \sqrt{3}$; 2° $\operatorname{cotg} z = 2 + i$.

R. 1° Înlocuind pe $\sin z$ cu valoarea lui în funcție de e^{iz}, obținem ecuația

$$e^{2iz} - 2i\sqrt{3}\, e^{iz} - 1 = 0.$$

Rezolvînd această ecuație în raport cu e^{iz}, avem

$$e^{iz} = i(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}).$$

Avînd în vedere că $\sqrt{3} \pm \sqrt{2} > 0$, această egalitate se mai poate scrie

$$e^{iz} = (\sqrt{3} \pm \sqrt{2})\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}.$$

ede unde

$$iz = \ln(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}) + i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

sau

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - i \ln(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}).$$

Ținînd seama că $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, rezultă

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm i \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}),$$

unde pentru logaritm se consideră determinarea principală.

2° Avem

$$\operatorname{cotg} z = i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}$$

de unde

$$i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = 2 + i$$

şi deci

$$e^{2iz} = 1 + i.$$

Rezultă

$$z = -\frac{i}{2}\ln(1+i)$$

sau, avînd în vedere că $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$,

$$z = -\frac{i}{2}\left[\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right],$$

adică

$$z = \frac{(8k+1)\pi}{8} - \frac{i}{4}\ln 2.$$

II.4. Să se determine raza de convergenţă a seriei

$$1 + \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{n^2} + \cdots$$

şi să se studieze apoi seria pe cercul de convergenţă.

R. Raza de convergenţă a seriei este dată de formula

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|},$$

deci

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Seria este absolut convergentă în domeniul $|z| < 1$.

Pentru a determina comportarea seriei pe cercul de convergenţă, aplicăm teorema Abel. Considerăm deci seria cu termenul general $u_n = a_n R^n$, unde $u_n = \frac{1}{n^2}$. Termenii acestei serii sînt pozitivi şi descresc tinzînd către zero. Deci, seria este convergentă pe tot cercul $|z| = 1$, afară, eventual, de punctul $z = 1$.

Pentru $z = 1$, seria devine

$$1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

şi este convergentă. Deci, seria dată este convergentă în tot domeniul $|z| \leqslant 1$.

II.5. Să se determine raza de convergenţă a seriilor

$1^\circ \sum_{n \geqslant 0} q^{n^2} z^n$, $(|q| < 1)$; $2^\circ \sum_{n \geqslant 0} n^p z^n$, p întreg şi pozitiv.

R. 1° Raza de convergenţă a acestei serii este

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{q^{(n+1)^2}}{q^{n^2}} \right|} = \infty.$$

Seria este absolut şi uniform convergentă în tot planul în afară de punctul de la infinit.

2° Pentru această serie avem

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^p}{n^p} \right|} = 1.$$

Pe discul $|z| < 1$ seria este absolut convergentă iar pe cercul $|z| = 1$ seria este divergentă .

II.6. Să se determine raza de convergenţă a seriei

$$1 + \frac{z^p}{1} + \frac{z^{2p}}{2} + \cdots + \frac{z^{np}}{n} + \cdots \tag{1}$$

şi să se studieze seria pe cercul de convergenţă.

R. Cu substituţia $\zeta = z^p$ seria (1) devine

$$1 + \frac{\zeta}{1} + \frac{\zeta^2}{2} + \cdots + \frac{\zeta^n}{n} + \cdots \tag{2}$$

Raza de convergenţă a acestei serii este

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Seria (2) este absolut convergentă în domeniul $|\zeta| < 1$.
Termenii seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sînt pozitivi şi descresc tinzînd către zero, deci seria (2) este convergentă pe tot cercul $|\zeta| = 1$, în afară de punctul $\zeta = 1$. În acest punct seria (2) se scrie

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

şi este divergentă.

Rezultă că seria (2) este convergentă în domeniul $|\zeta| < 1$, în afară de punctul $\zeta = 1$.

Prin transformarea $\zeta = z^p$, domeniul $|\zeta| \leqslant 1$ devine domeniul $|z| \leqslant 1$, iar punctul $\zeta = 1$ corespunde imaginilor soluţiilor ecuaţiei

$$z^p = 1$$

care sînt punctele

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p}, \ (k = 0, 1, \ldots, p-1). \tag{3}$$

Deci, seria (1) este convergentă în domeniul $|z| \leqslant 1$, în afară de punctele (3).

II.7. Să se dezvolte funcţia

$$f(z) = \frac{z^2 + 4z + 1}{-z^3 - 2z^2 + z + 2}$$

în serie în jurul punctelor $z = 0$, $z = \pm 1$, $z = 2$.

R. Funcţia $f(z)$ admite punctele $z = \pm 1$, $z = 2$ ca poli simpli. Putem scrie funcţia sub forma

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2+z} - \frac{1}{1+z}. \tag{1}$$

În cercul $|z| < 1$, funcția $f(z)$ este olomorfă și avem

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots,$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots,$$

$$\frac{1}{2+z} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} + \cdots + (-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n + \cdots\right].$$

Deci, în cercul $|z| < 1$, dezvoltarea funcției este

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{7}{4}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{31}{16}z^3 + \cdots + \left[1 - (-1)^n + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right]z^n + \cdots$$

Pentru a dezvolta funcția $f(z)$ în jurul punctului $z = -1$, scriem relația (1) sub forma

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} + \frac{1}{1+(z+1)} - \frac{1}{1+z}.$$

În interiorul cercului cu centrul în punctul -1 și de raza 1 avem $|z+1| < 1$, $\left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$ și deci,

$$\frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = 1 + \frac{z+1}{2} + \frac{(z+1)^2}{4} + \cdots,$$

$$\frac{1}{1+(z+1)} = 1 - (z+1) + (z+1)^2 - (z+1)^3 + \cdots,$$

și deci, dezvoltarea funcției $f(x)$ în jurul punctului $z = -1$ este

$$f(z) = -\frac{1}{1+z} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}(z+1) + \frac{9}{8}(z+1)^2 - \frac{15}{16}(z+1)^3 + \cdots$$

Dacă scriem relația (1) sub forma

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{3}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}}$$

în interiorul cercului cu centrul în punctul $z = 1$ și cu raza 1, avem $|z - 1| < 1$, $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, $\left|\frac{z-1}{3}\right| < 1$ și deci,

$$\frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} = 1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \cdots + (-1)^n \left(\frac{z-1}{2}\right)^n + \cdots,$$

$$\frac{1}{1 + \frac{z-1}{3}} = 1 - \frac{z-1}{3} + \left(\frac{z-1}{3}\right)^2 - \cdots + (-1)^n \left(\frac{z-1}{3}\right)^n + \cdots$$

Deci, dezvoltarea funcției $f(z)$ în jurul punctului $z = 1$ este

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n.$$

Să scriem acum funcția (1) sub forma

$$f(z) = -\frac{1}{1 + (z-2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-2}{4}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-2}{3}}.$$

În interiorul cercului cu centrul în punctul $z = 2$ și raza 1, avem $|z - 2| < 1$, $\left|\frac{z-2}{4}\right| < 1$, $\left|\frac{z-2}{3}\right| < 1$, deci

$$\frac{1}{1 + (z-2)} = 1 - (z-2) + (z-2)^2 - \cdots + (-1)^n (z-2)^n + \cdots,$$

$$\frac{1}{1 + \frac{z-2}{3}} = 1 - \frac{z-2}{3} + \left(\frac{z-2}{3}\right)^2 - \cdots + (-1)^n \left(\frac{z-2}{3}\right)^n + \cdots,$$

$$\frac{1}{1 + \frac{z-2}{4}} = 1 - \frac{z-2}{4} + \left(\frac{z-2}{4}\right)^2 - \cdots + (-1)^n \left(\frac{z-2}{4}\right)^n + \cdots$$

Rezultă că în coroana circulară $0 < |z - 2| < 1$ avem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)(z-2)^n.$$

II.8. Se dă funcţia

$$f(z) = \sqrt{1 - z^2} + \sqrt{4 - z^2}$$

unde pentru cei doi radicali se consideră ramurile care în origine iau valorile 1, respectiv 2.

Să se dezvolte această funcţie în serie de puteri ale lui z în domeniile :

$$1^\circ\ |z| < 1;\ 2^\circ\ 1 < |z| < 2;\ 3^\circ\ |z| > 2.$$

R. Funcţia $\sqrt{1 + z^2}$ are punctele critice $z = \pm 1$, deci ramura considerată este uniformă în interiorul şi în exteriorul cercului de ecuaţie $|z| = 1$.

Funcţia $\sqrt{4 - z^2}$ are punctele critice $z = \pm 2$, deci ramura considerată este uniformă în interiorul şi în exteriorul cercului de ecuaţia $|z| = 2$.

Rezultă că ramura considerată a funcţiei $f(x)$ este uniformă în domeniile date. Scriem funcţia $f(z)$ sub forma

$$f(z) = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} + 2\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

În domeniul $|z| < 1$ avem $|z^2| < 1$ şi $\left|\frac{z^2}{4}\right| < 1$, şi aplicînd formula seriei binomiale avem

$$(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} z^4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 - \cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} z^{2n} - \cdots \tag{1}$$

$$\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{z^2}{4} - \frac{1}{2 \cdot 4}\,\frac{z^4}{4^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot z^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4^3} - \cdots -$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\,\frac{z^{2n}}{4^n} + \cdots, \tag{1'}$$

de unde

$$f(z) = 3 - \frac{3}{4} z^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \left(1 + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) z^{2n}.$$

Pentru a dezvolta funcţia $f(z)$ în domeniul $1 < |z| < 2$, o scriem sub forma

$$f(z) = iz\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 2\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

În domeniul considerat avem $\left|\frac{z^2}{4}\right| < 1$, rezultă că formula (1') este satisfăcută, iar $\left|\frac{1}{z^2}\right| < 1$, deci avem

$$\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2\cdot 4}\,\frac{1}{z^4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{z^6} - \cdots -$$

$$- \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{z^{2n}}\cdots \qquad (2)$$

Astfel, în domeniul $1 < |z| < 2$ funcția $f(z)$ are dezvoltarea

$$f(z) = -\frac{i}{2z} + 2 + iz - \frac{z^2}{4} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\left(2z^{2n} + \frac{i}{z^{2n-1}}\right).$$

Scriem acum funcția $f(z)$ sub forma

$$f(z) = iz\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} + iz\left(1-\frac{4}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

În domeniul $|z| > 2$ avem $\left|\frac{1}{z^2}\right| < 1$, deci formula (2) este satisfăcută și $\left|\frac{4}{z^2}\right| < 1$, deci

$$\left(1-\frac{4}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{z^2} - \frac{1}{2\cdot 4}\,\frac{4^2}{z^4} - \cdots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\,\frac{4^n}{z^{2n}} - \cdots$$

Rezultă dezvoltarea funcției

$$f(z) = 2iz - \frac{51}{2z} - i\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1+4^n}{z^{2n-1}}.$$

II.9. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z în jurul originii funcția

$$f(z) = \frac{z}{\sin z^3}.$$

R. Funcția $\sin z^3$ fiind olomorfă pentru orice z finit, avem

$$\sin z^3 = z^3 - \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \cdots$$

Funcţia $f(z)$ are originea ca pol dublu, iar punctele $z = \sqrt[3]{k\pi}$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, ca poli simpli.

Ţinînd seama de expresia funcţiei $\sin z^3$, obţinem

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{12}}{5!} - \cdots}.$$

Funcţia

$$\frac{1}{1 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{12}}{5!} - \cdots}$$

este olomorfă în domeniul $|z| < 1$, deci se poate dezvolta în serie Taylor şi putem scrie

$$\frac{1}{1 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{12}}{5!}} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Identificînd coeficienţii, găsim

$$a_0 = 1, a_1 = 0, \ a_2 = 0, \ a_3 = 0, \ a_4 = 0, \ a_5 = 0, \ a_6 = \frac{1}{3}.$$

$$a_7 = 0, \ a_8 = 0, \ a_9 = 0, \ a_{10} = 0, \ a_{11} = 0, \ a_{12} = -\frac{35}{36}, \cdots$$

deci

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} z^4 - \frac{35}{36} z^{10} + \cdots$$

II.10. Să se dezvolte în serie în jurul punctului $z = 1$ funcţia

$$f(z) = \sin \frac{z}{z-1}.$$

R. Avem

$$\sin \frac{z}{z-1} = \sin\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \sin 1 \cos \frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin \frac{1}{z-1}.$$

Ţinînd seama de formulele de dezvoltare în serie a funcţiilor trigonometrice, rezultă

$$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!} \frac{1}{(z-1)^5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!\,(z-1)^{2n+1}} + \cdots,$$

$$\cos \frac{1}{z-1} = 1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!\,(z-1)^{2n}} + \cdots$$

De aici obţinem

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^2}-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^3}+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\cdots$$

II.11. Se consideră funcţia

$$f(z)=\frac{1}{1-z^2}\ln\frac{i-z}{i+z},$$

unde pentru logaritm se consideră determinarea care se anulează în origine. Se cere să se dezvolte această funcţie în seria de puteri ale lui z în domeniile:

$$1^\circ\,|z|<1;\ 2^\circ\,|z|>1.$$

R. Funcţia $f_1(z)=\ln\frac{i-z}{i+z}$ are două puncte critice $z=\pm i$. Determinarea considerată pentru această funcţie este uniformă în domeniile date.

Funcţia $f(z)$ are doi poli simpli în punctele $z=\pm 1$.

Pentru $|z|<1$ avem

$$f(z)=\frac{1}{1-z^2}\ln\frac{1-\frac{z}{i}}{1+\frac{z}{i}}$$

şi $\left|\frac{z}{i}\right|<1$, $|z^2|<1$, deci,

$$\ln\left(1-\frac{z}{i}\right)=\frac{z}{i}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{i}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{z}{i}\right)^n+\cdots,$$

$$\ln\left(1+\frac{z}{i}\right)=\frac{z}{i}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{i}\right)^2+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{z}{i}\right)^n\cdot\frac{1}{n}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n}+\cdots$$

Rezultă că în domeniul $|z|<1$ avem

$$f(z)=(1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n}+\cdots)\left[-z^2+\frac{z^4}{2}-\frac{z^6}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{3n}}{n}+\cdots\right].$$

Efectuînd produsul celor două serii, obținem

$$f(z) = -z^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) z^4 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) z^6 - \cdots - \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right] z^{2n} + \cdots$$

Pentru a dezvolta funcția $f(z)$ în domeniul $|z| > 1$, vom face substituția $z = \frac{1}{u}$. Domeniul $|z| > 1$ se transformă prin această substituție în domeniul $|u| < 1$, iar $f(z)$ devine

$$F(u) = \frac{u^2}{u^2 - 1} \ln \frac{ui - 1}{ui + 1}.$$

Ținînd seama că pentru logaritm am considerat determinarea care se anulează în origine, rezultă

$$\ln \frac{ui - 1}{ui + 1} = \pi i - \ln \frac{1 - ui}{1 + ui},$$

adică

$$\ln \frac{ui - 1}{ui + 1} = \pi i - u^2 + \frac{1}{2} u^4 - \frac{1}{3} u^6 + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} u^{2n} + \cdots$$

De asemenea, în domeniul $|u| < 1$ avem

$$\frac{u^2}{u^2 - 1} = -u^2 - u^4 - u^6 - \cdots - u^{2n} - \cdots$$

Rezultă

$$F(u) = -(u^2 + u^4 + u^6 + \cdots + u^{2n}) \left[\pi i - u^2 + \frac{1}{2} u^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n} u^{2n} + \cdots\right] =$$

$$= -\pi i u^2 - (\pi i - 1) u^4 - \left(\pi i - 1 + \frac{1}{2}\right) u^6 - \left(\pi i - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) u^8 - \cdots$$

$$\cdots - \left[\pi i - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n-1}\right] u^{2n} - \cdots$$

Revenind la variabila z, deducem dezvoltarea funcției $f(z)$ în domeniul $|z| > 1$:

$$f(z) = -\pi i \frac{1}{z^2} - (\pi i - 1) \frac{1}{z^4} - \left(\pi i - 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{z^6} - \left(\pi i - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{z^8} - \cdots$$

$$\cdots - \left[\pi i - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n-1}\right] \frac{1}{z^{2n}} + \cdots$$

II.12. Să se dezvolte după puterile lui z funcţia

$$Z = \sin m(\arcsin z),$$

unde se ia acea ramură a funcţiei $u = \arcsin z$ care se anulează pentru $z = 0$, m fiind o constantă oarecare.

R. Funcţia Z este olomorfă în interiorul cercului $|z| = 1$, deoarece avem

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{m \cos mu}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Pentru a determina coeficienţii seriei, observăm că Z satisface ecuaţia diferenţială

$$(1 - z^2)\frac{d^2Z}{dz^2} - z\frac{dZ}{dz} + m^2Z = 0.$$

Derivînd de p ori şi făcînd, în rezultat, $z = 0$, se obţine relaţia de recurenţă

$$\left(\frac{d^{p+2}Z}{dz^{p+2}}\right)_{z=0} = (p^2 - m^2)\left(\frac{d^pZ}{dz^p}\right)_{z=0},$$

deci

$$Z = \frac{mz}{1!} + \frac{m(1^2 - m^2)}{3!}z^3 + \frac{m(1^2 - m^2)(3^2 - m^2)}{5!}z^5 + \dots$$

$$\dots + \frac{m(1^2 - m^2)\cdots[(2n-1)^2 - m^2]}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \dots$$

II.13. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcţia

$$f(z) = \frac{z \sin \alpha}{1 - 2z\cos\alpha + z^2}$$

unde α este real şi să se calculeze pentru $|z| \neq 1$ integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\alpha \sin n\alpha}{1 - 2z\cos\alpha + z^2}\, d\alpha.$$

R. Funcţia $f(z)$ se mai scrie

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1 - ze^{i\alpha}} - \frac{1}{1 - ze^{-i\alpha}}\right).$$

Dezvoltînd în serie cele două funcţii din paranteză, pentru $|z| < 1$, avem

$$\frac{1}{1 - ze^{i\alpha}} = 1 + ze^{i\alpha} + z^2 e^{2i\alpha} + \cdots + z^n e^{ni\alpha} + \cdots,$$

$$\frac{1}{1 - ze^{-i\alpha}} = 1 + ze^{-i\alpha} + z^2 e^{-2i\alpha} + \cdots + z^n e^{-ni\alpha} + \cdots,$$

de unde

$$f(z) = z \sin \alpha + z^2 \sin 2\alpha + \cdots + z^n \sin n\alpha + \cdots$$

Avem

$$zI = \int_0^{2\pi} f(z) \sin n\alpha \, d\alpha,$$

deci, înmulţind seria de mai sus cu $\sin n\alpha$, integrînd apoi termen cu termen şi ţinînd seama de egalităţile

$$\int_0^{2\pi} \sin n\alpha \sin k\alpha d\alpha = \begin{cases} 0, \text{ pentru } n \neq k, \\ \pi, \text{ pentru } n = k, \end{cases}$$

găsim

$$I = \pi z^{n-1}.$$

Pentru $|z| > 1$, facem în integrala I schimbarea

$$z = \frac{1}{\zeta}$$

şi avem

$$\zeta^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \alpha \sin n\alpha}{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\alpha = \pi (\zeta)^{n+1} = \frac{\pi}{z^{n+1}}.$$

Pentru $|z| = 1$, integrala nu are sens, deoarece numitorul lui $f(z)$ se anulează în intervalul de integrare.

II.14. Să se determine punctele în care funcţia

$$f(z) = z^2 - z\bar{z} - \bar{z}^2 + \bar{z} - 2z$$

este monogenă şi să se calculeze în acele puncte derivata funcţiei

R. Avem

$$f(z) = -x^2 - 3y^2 - x + iy(4x - 3).$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţiile Cauchy-Riemann, obţinem sistemul

$$-2x - 1 = 4x - 3, \; 6y = 4y,$$

care are soluţia $x = \frac{1}{3}$, $y = 0$.

Deci funcţia dată este monogenă doar în punctul $z = 1/3$.
Avem

$$\Delta f = f(z+\Delta z) - f(z) = 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z\overline{\Delta z} - \bar{z}\Delta z - \Delta z\overline{\Delta z} - 2\bar{z}\overline{\Delta z} - \overline{(\Delta z)^2} - 2\Delta z + \overline{\Delta z}.$$

În punctul $z = \frac{1}{3}$ avem $\bar{z} = \frac{1}{3}$ şi deci această expresie are valoarea

$$\Delta f = -\frac{5}{3}\Delta z - \overline{\Delta z} - \Delta z\overline{\Delta z} + (\Delta z)^2 - \overline{(\Delta z)^2},$$

deci

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = -\frac{5}{3} - \overline{\Delta z} + \Delta z - \frac{\overline{(\Delta z)^2}}{\Delta z}.$$

Dacă $\Delta z \to 0$, avem $\overline{\Delta z} \to 0$ şi

$$\left| \frac{\overline{(\Delta z)^2}}{\Delta z} \right| = \frac{|\overline{\Delta z}|^2}{|\Delta z|} = \frac{|\Delta z|^2}{|\Delta z|} = |\Delta z|$$

şi trecînd la limită avem

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = -\frac{5}{3},$$

adică

$$|f'(z)|_{z=\frac{1}{3}} = -\frac{5}{3}.$$

II.15. Fie $f(z) = Z$ o funcţie de variabilă complexă z.
Se dă un punct z şi notăm prin Z' derivata lui Z după direcţia de coeficient unghiular λ.
Să se calculeze Z' şi să se arate că, în general, dacă λ variază, maginea numărului complex Z' descrie un cerc.
Caz particular $Z = \bar{z}$.

R. Fie $Z = P(x, y) + iQ(x, y)$ o funcţie de variabilă complexă $z = x + iy$. Presupunem că P şi Q admit derivate de ordinul întîi continue.
Ne plasăm într-un punct de referinţă, care poate fi ales ca origine. Dacă derivata lui Z există, ea este limita lui $\frac{\Delta Z}{\Delta z}$ cînd $|\Delta z|$ tinde la zero. Dacă derivata nu există, există în general o derivată după fiecare direcţie, (dacă Δz tinde la 0 după o direcţie de parametru director λ dat). Această derivată este egală cu

$$Z' = \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{hP'_x + kP'_y + i(hQ'_x + kQ'_y)}{h + ik},$$

h şi k tinzînd la zero astfel încît $\frac{k}{h}$ să tindă la λ. Deci

$$Z' = \frac{P'_x + iQ'_x + \lambda(P'_y + iQ'_y)}{1 + i\lambda}.$$

În general Z' depinde de λ. Pe de altă parte Z' este o funcţie omografică de λ. Dacă numărul real λ variază, numărul complex Z' descrie deci un cerc γ, imaginea prin transformarea omografică a axei reale. γ trece prin punctele

$$A = P'_x + iQ_x, \text{ imaginea lui } \lambda = 0,$$

$$B = \frac{P'_y + iQ'_y}{i}, \text{ imaginea lui } \lambda = \infty.$$

Putem scrie

$$Z' = (A - B)t + B$$

cu $t = \frac{1}{1 + i\lambda}$. Cînd λ descrie axa reală, t descrie un cerc γ' de diametru (0, 1), (fig. II. 15).

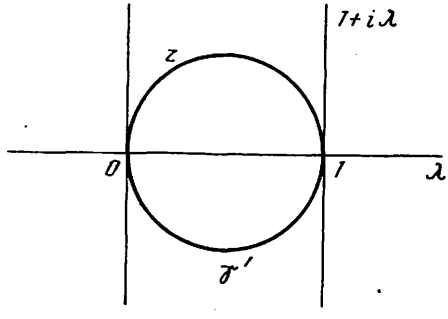


Fig. II. 15

Punctul $(A - B)t$ descrie un cerc γ'' de diametru $|A - B|$, dedus din γ' printr-o similitudine de centru O. Cercul γ se deduce din γ'' prin translaţia B.

Pentru ca Z să admită derivată, este necesar ca Z' să ia aceeaşi valoare în toate direcţiile, adică să nu depindă de λ. Cercul γ se reduce la un punct, diametrul său fiind nul:

$|A - B| = 0$. Altfel spus, cele două numere complexe A şi B sînt egale. Egalînd părţile reale şi imaginare, obţinem condiţiile Cauchy-Riemann.

Funcţia $Z = \bar{z}$ nu este olomorfă. În origine avem

$$Z' = \frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda}$$

şi deci $|Z'| = 1$, de unde rezultă că Z' descrie cercul unitate

II.16. Să se stabilească ecuațiile Cauchy-Riemann în coordonate polare. Să se determine apoi funcția olomorfă $f(z)$ a cărei parte reală depinde numai de $r = |z|$.

R. Să considerăm funcția olomorfă

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Ecuațiile Cauchy-Riemann se scriu

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Fie

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} dx &= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ dy &= \sin\theta\, dr - r\cos\theta\, d\theta \end{aligned}\right\};$$

de unde

$$dr = \cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy,$$

$$r d\theta = -\sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy.$$

În coordonate polare pentru ecuațiile Cauchy-Riemann avem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned}\right\}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} &= \frac{\partial Q}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial Q}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \\ \frac{\partial P}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} &= -\frac{\partial Q}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial Q}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \end{aligned}\right\}$$

care sînt echivalente, prin combinații liniare evidente, cu

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta}, \qquad -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial r}.$$

Pentru a determina funcția olomorfă $f(z)$ a cărei parte reală P nu depinde decît de r, ecuația a doua Cauchy-Riemann exprimă că Q depinde numai de θ. Atunci

$$r\frac{\partial P}{\partial r} \text{ și } \frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

sînt egale cu aceeași constantă k. Deci

$$P = k \ln r + a,$$

$$Q = k\theta + b$$

unde a, b, k sînt constante reale. De aici

$$Z = P + iQ = k(\ln r + i\theta) + a + bi = k \ln z + z_0,$$

unde k este un număr real iar z_0 un număr complex arbitrar.

II.17. Să se determine funcția analitică a cărei parte reală este

$$P(x, y) = \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}.$$

R. Avem

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \text{ și } \overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y).$$

Rezultă

$$2P(x, y) = f(z) + \overline{f(z)}. \tag{1}$$

Prin ipoteză $P(x, y)$ este armonică, adică

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

sau dacă întrebuințăm variabilele z și $\bar{z}$, $\dfrac{\partial^2 P}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.

Deci membrul al doilea al egalității (1) se descompune într-o sumă de două funcții, una de z și alta de $\bar{z}$.

Pentru a găsi funcția de z, înlocuim în $P(x, y)$ pe x și y în funcția de z și $\bar{z}$ și obținem

$$2P\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = f(z) + \overline{f(z)}. \tag{2}$$

Pentru a determina pe $f(z)$, vom pune membrul întîi al egalității (2) sub forma unei sume de două funcții, una în z și alta în $\bar{z}$. Funcția în z este cea căutată.

În cazul problemei, mebrul întîi al egalității (2) devine

$$2P\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = 2\,\frac{\sin(z + \bar{z})}{\frac{1}{2}\left(e^{-i(z-\bar{z})} + e^{i(z-\bar{z})}\right) - \cos(z + \bar{z})} =$$

$$= 2\,\frac{\sin(z + \bar{z})}{\cos(z - \bar{z}) - \cos(z + \bar{z})} = \frac{\sin(z + \bar{z})}{\sin z \sin \bar{z}} = \operatorname{cotg} z + \operatorname{cotg} \bar{z}.$$

Deci $f(z) = \operatorname{cotg} z + Ai$, unde A este un număr real oarecare, căci punînd în (2) pe $f(z) + Ai$ în loc de $f(z)$, egalitatea nu se schimbă.

II.18. Să se determine funcţia analitică a cărei parte reală este

$$P(x, y) = \frac{x}{2} \ln(x^2 + y^2) - y \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

şi care în punctul $z = 1$ ia valoarea zero.

R. Avem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 1, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Din ecuaţiile lui Cauchy-Riemann, rezultă

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 1,$$

deci

$$dQ = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, dx + \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 1\right] dy.$$

Integrînd pe drumul din fig. II.18, avem

$$Q = \int_{x_0}^{x} \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x}\, dx + \int_{y_0}^{y} \left\{\frac{1}{2} [\ln(x^2 + y^2) + 1]\right\} dy =$$

$$x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} y \ln(x^2 + y^2) - y + C, \quad (C = \text{const}).$$

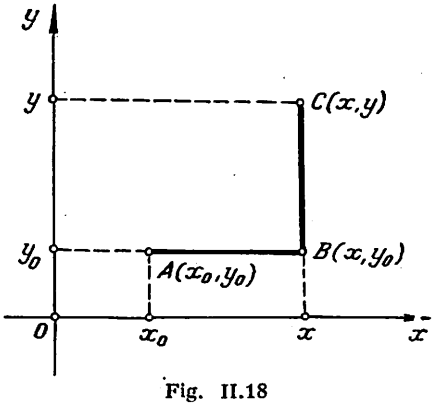


Fig. II.18

Funcţia analitică f(z) este

$$f(z) = \frac{x}{2}\ln(x^2+y^2) - y\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + i\left[x\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + \frac{y}{2}\ln(x^2+y^2) - \frac{y}{2} + C\right].$$

Făcînd aici $y = 0$, obţinem $z = x$, deci

$$f(x) = x\ln x + iC,$$

de unde rezultă

$$f(z) = z\ln z + iC.$$

Pentru $z = 1$ avem $0 = iC$, de unde $C = 0$. Funcţia căutată este

$$f(z) = z\ln z.$$

O altă metodă este următoarea :.
Luînd $z = re^{i\theta}$, avem

$$P = x\ln r - y\theta.$$

Dacă

$$\zeta = \ln z = \ln r + i\theta,$$

observăm că

$$\zeta z = x\ln r - y\theta + i(x\theta + y\ln r).$$

Obţinem

$$f(z) = z\ln z + iC,$$

C fiind o constantă reală, iar din condiţia dată rezultă că $C = 0$, deci

$$f(z) = z\ln z.$$

II.19. Să se determine funcţia analitică a cărei parte reală este

$$P(x, y) = \varphi(x^2 + y^2).$$

R. Funcţia $P(x, y)$ este armonică, deci $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$

Notăm $u = x^2 + y^2$; avem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x\varphi'(u), \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y\varphi'(u). \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 4x^2\varphi''(u) + 2\varphi'(u), \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 4y^2\varphi''(u) + 2\varphi'(u).$$

Condiţia (1) se scrie

$$4(x^2 + y^2)\,\varphi''(u) + 4\varphi'(u) = 0$$

sau

$$u\varphi''(u) + \varphi'(u) = 0,$$

de unde obţinem

$$\varphi'(u) = \frac{\alpha}{u} \quad \text{şi} \quad \varphi(u) = \alpha \ln u + \beta$$

cu $u = x^2 + y^2$.

Deci $P(x, y) = \alpha \ln (x^2 + y^2) + \beta$.

Din ecuaţiile Cauchy-Riemann obţinem

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2\alpha y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2\alpha x}{x^2 + y^2}$$

şi

$$\mathrm{d}Q = 2\alpha \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}.$$

de unde rezultă

$$Q = 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \gamma.$$

Funcţia $f(z)$ este

$$f(z) = \alpha \ln (x^2 + y^2) + \beta + i\left(2\alpha \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \gamma\right)$$

sau făcînd $y = 0$, $z = x$,

$$f(z) = 2\alpha \ln z + \beta + i\gamma$$

cu α, β, γ constante reale.

II.20. Să se determine funcţia analitică $f(z) = P + iQ$, a cărei parte reală este funcţie de $x \cos \varphi + y \sin \varphi$ unde φ este un unghi dat.

R. Avem

$$P(x, y) = F(x \cos \varphi + y \sin \varphi),$$

de unde

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = F''(x \cos \varphi + y \sin \varphi) \cos^2 \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = F''(x \cos \varphi + y \sin \varphi) \sin^2 \varphi.$$

Condiția $\Delta P=0$ devine $F''=0$, deci $F(u) = au+b$, unde a și b sînt constante reale. Deci

$$P(x, y) = a(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + \iota$$

și din ecuațiile Cauchy-Riemann

$$Q(x, y) = a(-x \sin \varphi + y \cos \varphi) + C.$$

Funcția olomorfă, a cărei parte reală este P, este

$$f(z) = ae^{-i\varphi z} + b + ic,$$

unde a, b, c sînt constante reale.

II.21. Să se determine condiția ca funcția $P(x, y) = a(x)\, b(y)$ să fie o funcție armonică. În acest caz să se găsească funcția monogenă a cărei parte reală este $P(x, y)$.

R. Punînd condiția ca $P(x, y)$ să fie armonică

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0,$$

găsim

$$a''(x)\, b(y) + a(x)\, b''(y) = 0$$

cu

$$\frac{a''(x)}{a(x)} = -\frac{b''(y)}{b(y)} = k.$$

Avem

$$a''(x) - ka(x) = 0\,;\; b''(y) + kb(y) = 0.$$

Pentru $k = 0$, $a(x) = a_1x + a_2$; $b(y) = b_2y + b_2$;

pentru $k = h^2$, $a(x) = a_1e^{hx} + a_2e^{-hx}$, $b(y) = b_1 \sin hy + b_2 \cos hy$;

pentru $k = -h^2$, $a(x) = a_1 \sin hx + a_2 \cos hx$, $b(y) = b_1e^{hy} + b_2e^{-hy}$.

1) Dacă $P(x, y) = (a_1x + a_2)\cdot(b_1y + b_2)$, din ecuațiile Cauchy-Riemann obținem

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = -b_1(a_1x + a_2), \qquad \frac{\delta Q}{\delta y}\, a_1(b_1y + b_2).$$

Integrînd prima relație, avem

$$Q = -\frac{a_1b_1}{2}\, x^2 - a_2b_1x + \lambda(y),$$

iar din relaţia a doua găsim

$$\lambda'(y) = a_1b_1y + a_1b_2,$$

deci

$$\lambda(y) = \frac{a_1b_1}{2}\, y^2 + a_1b_2y + c, \qquad (c = \text{const}),$$

de unde

$$Q(x,\ y) = -\frac{a_1b_1}{2}(x^2 - y^2) - a_2b_1x + a_1b_2y + c.$$

Funcţia $f(z)$ va fi

$$f(z) = (a_1x + a_2)(b_1y + b_2) + \mathrm{i}\left[-\frac{a_1b_1}{2}(x^2 - y^2) - a_2b_1x + a_1b_2y + c\right].$$

Făcînd $y = 0$, obţinem $z = x$, deci

$$f(x) = b_2(a_1x + a_2) - \mathrm{i}\left(\frac{a_1b_1}{2}x^2 - a_2b_1x + c\right),$$

deci

$$f(z) = b_2(a_1z + a_2) - \mathrm{i}\left(\frac{a_1b_1}{2}z^2 - a_2b_1z + c\right).$$

2) Pentru $P(x,\ y) = (a_1e^{hx} + a_2e^{-hx})(b_1 \sin hy + b_2 \cos hy)$, ecuaţiile Cauchy-Riemann ne dau

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (a_1e^{hx} + a_2e^{-hx})(-b_1h \cos hy + b_2h \sin hy),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = h(a_1e^{hx} - a_2e^{-hx})(b_2 \sin hy + b_2 \cos hy).$$

Integrînd în raport cu x, obţinem

$$Q = \int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = (a_1e^{hx} - a_2e^{-hx})(-b_1 \cos hy + b_2 \sin hy) + \varphi(y).$$

Calculînd $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, se găseşte $\varphi'(y) = 0$, adică $\varphi(y)$ este o constantă. Deci

$$Q(x,\ y) = (a_1e^{hx} - a_2e^{-hx})(-b_1 \cos hy + b_2 \sin hy) + c.$$

Avem

$$f(x,\ y) = (a_1e^{hx} + a_2e^{-hx})(b_1 \sin hy + b_2 \cos hy) +$$
$$+ \mathrm{i}[(a_1e^{hx} - a_2e^{-hx}) \cdot (b_2 \sin hy - b_1 \cos hy) + c].$$

Făcînd $y = 0$, avem $z = x$, deci

$$f(z) = a_1(b_2 - ib_1)e^{hz} + a_2(b_2 + ib_1)e^{-hz} + ic.$$

3) Dacă $P(x, y) = (a_1 \sin hx + a_2 \cos hx)(b_1 e^{hy} + b_2 e^{-hy})$, avem

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -(a_1 \sin hx + a_2 \cos hx)(b_1 he^{hx} - b_2 he^{-hy}),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = (a_1 h \cos hx - a_2 h \sin hx)(b_1 e^{hy} + b_2 e^{-hy}).$$

Integrînd în raport cu x, obținem

$$Q = \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx = (a_1 \cos hx - a_2 \sin hx)(b_1 e^{hy} - b_2 e^{-hy}) + \psi(y).$$

Calculînd $\frac{\partial Q}{\partial y}$, găsim $\psi'(y) = 0$, deci $\psi(y) = c$, ($c = \text{const}$).

Avem

$$Q(x, y) = (a_1 \cos hx - a_2 \sin hx)(b_1 e^{hy} - b_2 e^{-hy}) + c,$$

de unde

$$f(x, y) = (a_1 \sin hx + a_2 \cos hx)(b_1 e^{hy} + b_2 e^{-hy}) +$$

$$+ i[(a_1 \cos hx + a_2 \sin hx)(b_1 e^{hy} - b_2 e^{-hy}) + c].$$

Pentru $y = 0$, $z = x$ avem deci

$$f(z) = [a_1(b_1 + b_2) + ia_2(b_2 - b_1)] \sin hz + [a_2(b_1 + b_2) + ia_1(b_1 - b_2)] \cos hz + ic$$

II.22. Să se studieze funcțiile multiforme

$$1^\circ\ Z = \sqrt{z^4 + 1}, \quad 2^\circ Z = \sqrt[4]{z^4 + 1}.$$

R. 1° Dacă notăm

$$z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \rho_1 e^{i\theta_1}, \qquad z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = \rho_2 e^{i\theta_2},$$

$$z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) = \rho_3 e^{i\theta_3}, \quad z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \rho_4 e^{i\theta_4},$$

funcţia Z se scrie

$$Z = (\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)^{\frac{1}{2}} e^{k\pi i + \frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)} \qquad (k = 0,\ 1).$$

Avînd în vedere reprezentarea geometrică a adunării şi scăderii numerelor complexe, rezultă că ρ_1 este segmentul care uneşte punctul $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ cu z, iar θ_1 unghiul dintre axa reală şi acest segment, în sens direct; analog pentru ρ_2, ρ_3, ρ_4, θ_2, θ_3 şi θ_4.
Cele două ramuri ale funcţiei Z sînt

$$Z_1 = (\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}.$$

$$Z_2 = (\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(2\pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}.$$

Dacă punctul z descrie arcul de curbă zMz_1 care uneşte z cu z_1 (fig. II.22, *a*) funcţia Z ia valoarea

$$Z' = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\theta + 2k\pi)}, \quad (\rho = \rho_1'\rho_2'\rho_3'\rho_4',\ \theta = \theta_1' + \theta_2' + \theta_3' + \theta_4').$$

Dacă z descrie arcul de curbă zNz_1 care uneşte z cu z_1 înconjurînd unul dintre cele patru puncte $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, de exemplu pe $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ (fig. II.22, *b*), funcţia Z ia valoarea

$$Z'' = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\theta + 2\pi + 2k\pi)} = -Z'.$$

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1 înconjurînd trei dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, funcţia Z ia valoarea

$$Z''' = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\theta + 6\pi + 2k\pi)} = -Z'.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1 înconjurînd două sau toate punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, funcţia Z ia valoarea Z'.

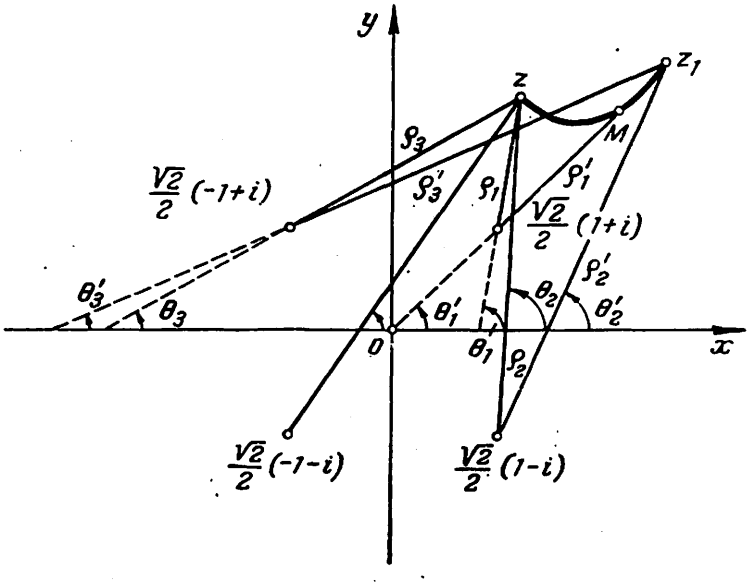


Fig. II.22, *a*

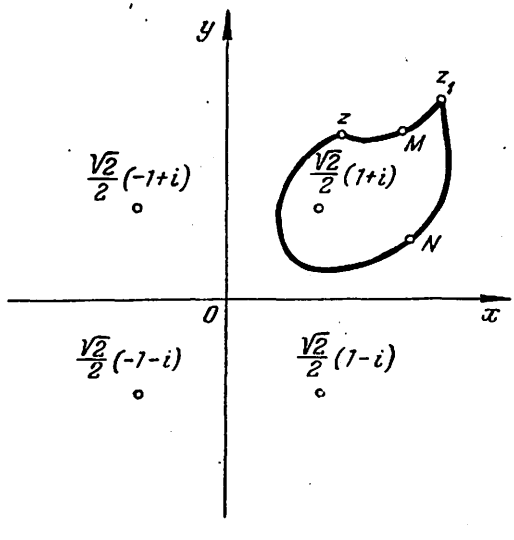


Fig. II.11, *b*

Deci, dacă punctul z descrie o curbă care înconjură un număr impar dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcţia Z trece de la o determinare la alta, iar dacă curba înconjură un număr par de puncte, valoarea funcţiei Z nu se schimbă.

Punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ sînt puncte critice ale funcţiei Z.

Dacă facem o tăietură care să unească două puncte critice şi o altă tăietură care să le unească pe celelalte două, ramurile funcţiei devin funcţii uniforme (fig. II.22, *c*).

2° Cu relaţiile de la punctul 1° avem

$$Z = (\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{4}(2k\pi+\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)},$$

$$(k = 0, 1, 2, 3).$$

Dacă z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1, fără a înconjura nici unul dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcţia Z ia valoarea

$$Z' = \rho^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{4}(2k\pi+\theta)}.$$

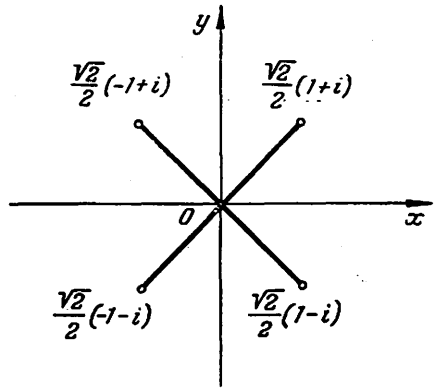


Fig. II, *c*

Dacă z descrie un arc de curbă care uneşte z cu z_1 înconjurînd unul dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcţia Z ia valoarea

$$Z'' = \rho^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{4}(2k\pi+2\pi+\theta)} = e^{\frac{\pi}{2}i} Z'.$$

Dacă arcul de curbă descris de z, care uneşte z cu z_1, înconjură două sau trei dintre punctele $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcţia Z ia valoarea

$$Z''' = \rho^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{4}(2k\pi+2\pi+\theta)} = e^{\pi i} Z',$$

respectiv

$$Z^{IV} = e^{\frac{3\pi}{2}i} Z'.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1 înconjurînd toate punctele $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z ia valoarea Z'.

Deci, dacă z descrie o curbă care înconjură unul, două sau trei dintre punctele $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z trece de la o determinare la alta, iar dacă curba înconjură toate punctele, funcția Z nu-și schimbă valoarea.

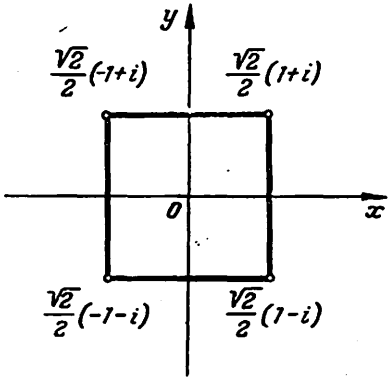


Fig. II.22, *d*

Punctele $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ sînt puncte critice ale funcției.

Dacă facem o tăietură care unește punctele $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ cu $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ și $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ cu $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ sau o tăietură de-a lungul pătratului cu vîrfuri în cele patru puncte, ramurile funcției Z devin uniforme (fig. II.22, *d*).

Ramurile funcției Z mai sînt uniforme și în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul dintre punctele $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, (fig. II.22, *e*).

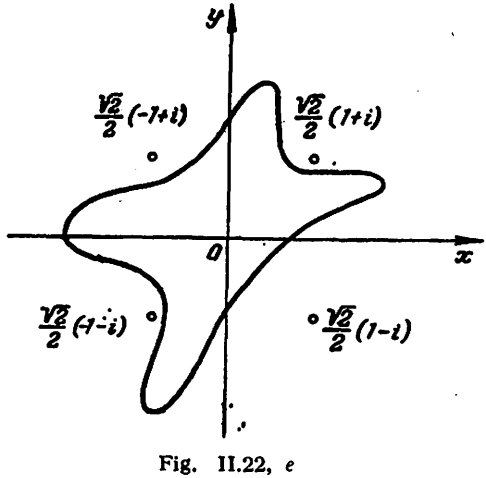


Fig. II.22, *e*

II.23. Să se studieze funcţia multiformă

$$Z = \ln \frac{z^2 - i}{z^2 + i}.$$

R. Dacă notăm

$$z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \rho_2 e^{i\theta_2},$$

$$z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = \rho_3 e^{i\theta_3}, \quad z - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) = \rho_4 e^{i\theta_4},$$

funcţia Z se scrie

$$Z = \ln \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3\rho_4} + i(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + 2k\pi).$$

Semnificaţiile geometrice ale numerelor ρ_h, $\theta_h (h = 1, 2, 3, 4)$ sînt cele din problema II.22.

Dacă punctul z descrie arcul de curbă zMz_1 (fig. II.22, *a*), funcţia Z ia valoarea

$$Z_1 = \ln \frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'} + i(\theta_1' + \theta_2' - \theta_3' - \theta_4' + 2k\pi).$$

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care uneşte z cu z_1 înconjurînd unul dintre punctele $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ fără a înconjura celelalte puncte, funcţia Z ia valoarea

$$Z_2 = \ln \frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'} + i(\theta_1' + \theta_2' + 2\pi - \theta_3' - \theta_4' + 2k\pi).$$

Dacă z descrie un arc de curbă care uneşte z cu z_1 şi înconjură unul dintre punctele $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ fără a le înconjura pe celelalte, funcţia Z ia valoarea

$$Z_3 = \ln \frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'} + i(\theta_1' + \theta_2' - \theta_3' - \theta_4' - 2\pi + 2k\pi).$$

Dacă arcul de curbă descris de z, care unește pe z cu z_1, înconjură punctele $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, funcția Z devine

$$Z_4 = \ln \frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'} + i(\theta_1' + \theta_2' + 4\pi - \theta_3' - \theta_4' + 2k\pi).$$

În cazul în care arcul descris de z înconjură punctele $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z devine

$$Z_5 = \ln \frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'} + i(\theta_1' + \theta_2' - \theta_3' - \theta_4' - 4\pi + 2k\pi).$$

Dacă arcul de curbă descris de z care unește z cu z_1 înconjură punctele $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ sau $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ sau $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ sau $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, funcția Z devine

$$Z_6 = \ln \frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'} + i(\theta_1' + \theta_2' + 2\pi - \theta_3' - \theta_4' - 2\pi + 2k\pi) = Z_1.$$

Dacă arcul de curbă înconjură trei dintre punctele $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z descrie

$$Z_7 = \ln \frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'} + i(\theta_1' + \theta_2' - \theta_3' - \theta_4' + 2\pi + 2k\pi)$$

sau

$$Z_8 = \ln \frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'} + i(\theta_1' + \theta_2' - \theta_3' - \theta_4' - 2\pi + 2k\pi).$$

În cazul în care arcul de curbă descris de z, care unește z cu z_1, înconjură toate punctele $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, funcția Z se scrie

$$Z_9 = \ln \frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'} + i(\theta_1' + \theta_2' + 4\pi - \theta_3' - \theta_4' - 4\pi + 2k\pi).$$

Avem

$$Z_2 = Z_7 = Z_1 + 2\pi i,\ Z_3 = Z_8 = Z_1 - 2\pi i,\ Z_4 = Z_1 + 4\pi i,\ Z_5 = Z_1 - 4\pi i,\ Z_6 = Z_9 = Z_1.$$

Deci punctele $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ sînt punctele critice ale funcţiei Z.

Făcînd una din tăieturile din figurile II.22, *c*, *d*, II.23, *a*, *b*, ramurile funcţiei Z devin uniforme. De asemenea aceste ramuri sînt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conţine nici unul din punctele critice ale funcţiei Z (fig. II.22, *e*).

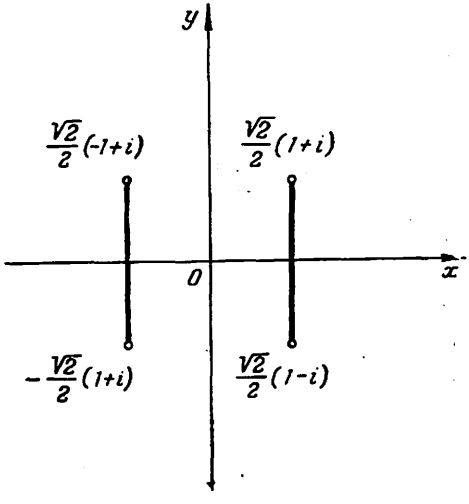


Fig. II.23, *a*

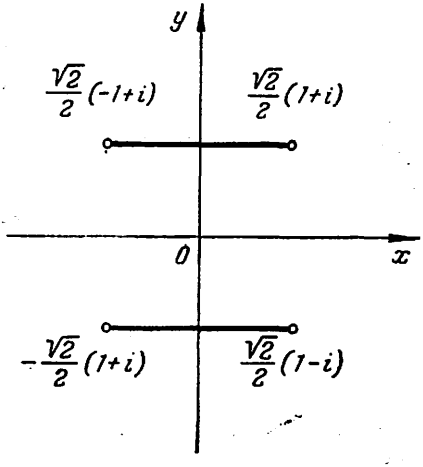


Fig. II.23, *b*

II.24. Să se studieze funcţia multiformă

$$Z = \operatorname{arctg} z.$$

R. Avem

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{i - z}{i + z},\ (z \neq \pm i).$$

Deci, notînd

$$\frac{i - z}{i + z} = \rho e^{i\theta},\ z_1 = \frac{1}{2i} \ln \rho + \frac{\theta}{2}.$$

funcţia dată se scrie

$$Z = z_1 + k.$$

Această funcţie este multiformă, avînd o infinitate de ramuri, punctele ei critice fiind $z = \pm i$.

Dacă z descrie o curbă închisă care înconjură în sens direct o singură dată numai unul din cele două puncte critice, funcția Z ia valoarea

$$Z_1 = Z + \pi.$$

Dacă z descrie o curbă închisă care înconjură ambele puncte critice, funcția Z reia aceeași valoare.

Ramurile funcției sînt uniforme în planul complex în care se face o tăietură de-a lungul segmentului de pe axa imaginară care unește punctele $\pm i$, (fig. II.24).

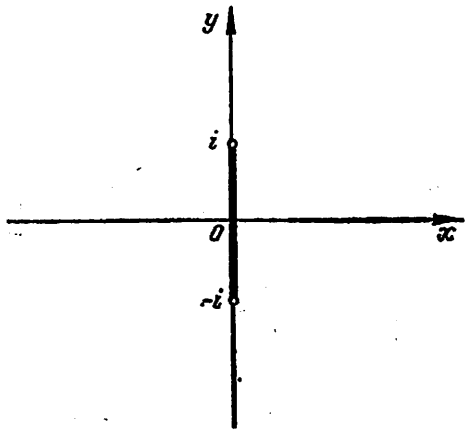


Fig. II.24

De asemenea, ramurile funcției sînt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele $\pm i$.

II.25. Să se calculeze integralele

$$I_1 = \int_C z^n \, dz, \; I_2 = \int_C z^{\frac{1}{2}} \, dz$$

de-a lungul unui cerc cu centrul în origine și de rază r, n fiind număr întreg.

R. Pe conturul C avem $z = re^{i\theta}$, $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$.

Vom lua ca punct de plecare un punct oarecare M pe cerc de argument α, deci punctul de sosire $N = M$ va avea argumentul $2\pi + \alpha$. Avem

$$I_1 = \int_M^N z^n dz = i \int_\alpha^{\alpha+2\pi} r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta = ir^{n+1} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta =$$

$$= \frac{r^{n+1}}{n+1} \left[e^{i(n+1)(\alpha+2\pi)} - e^{i(n+1)\alpha} \right].$$

Dacă n este întreg şi diferit de -1,

$$I_1 = 0.$$

Pentru $n = -1$

$$I_1 = \int_M^N \frac{dz}{z} = i \int_\alpha^{\alpha+2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Pentru I_2 avem

$$I_2 = \int_M^N z^{\frac{1}{2}} dz = i \int_\alpha^{\alpha+2\pi} r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} i\theta} d\theta = \frac{4}{3} r^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} i\alpha}$$

Din rezultatele obţinute este de remarcat faptul că funcţia z^n(n întreg) este o funcţie uniformă în domeniul dat, deci valorile integralei I_1 nu depind de punctul de plecare, deci de α. Funcţia $z^{\frac{1}{2}}$ are pe $z = 0$ punct critic situat în interiorul conturului C. Această funcţie nu este uniformă, deci rezultatul depinde de determinarea cu care am plecat.

II.26. Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{dz}{(z-\alpha)^m (z-\beta)^n},$$

m şi n fiind numere naturale, α şi β numere complexe al căror modul este diferit de 1, iar C este $|z| = 1$, (fig. II.26).

R. Funcţia

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^m (z-\beta)^n}$$

este uniformă avînd punctul $z = \alpha$ ca pol de ordinul m iar punctul $z = \beta$ ca pol de ordinul n.

Fie γ_1 şi γ_2 cercurile cu centrul în punctele $z_1 = \alpha$, $z_2 = \beta$ şi cu raze foarte mici. Avem

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

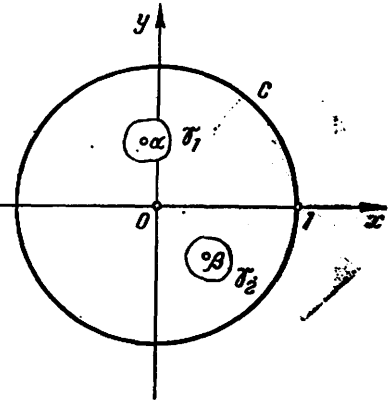


Fig. II.26

Aplicînd formula care ne dă derivata unei funcţii analitice exprimată prin integrale curbilinii, avem

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-\beta)^n}}{(z-\alpha)^m}\,dz = \frac{2\pi i}{(m-1)!}\,[(z-\beta)^{-n}]_{z=\alpha}^{m-1} =$$

$$= \frac{2\pi i}{(\alpha-\beta)^{m+n-1}}(-1)^{m-1}C_{m+n-2}^{m-1}\,; \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-\alpha)^m}}{(z-\beta)^n}\,dz =$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!}\,[(z-\alpha)^{-m}]_{z=\beta}^{(n-1)} = \frac{2\pi i}{(\beta-\alpha)^{m+n-1}}(-1)^{n-1}C_{m+n-2}^{n-1}.$$

De aici

$$I = 2\pi i\left[\frac{(-1)^{m-1}}{(\alpha-\beta)^{m+n-1}}\,C_{m+n-2}^{m-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{(\beta-\alpha)^{m+n-1}}\,C_{m+n-2}^{n-1}\right]$$

Dacă $|\alpha| > 1$, $|\beta| > 1$, punctele $z_1 = \alpha$, $z_2 = \beta$ nu sînt în interiorul conturului C, deci

$$I = 0.$$

Dacă $|\alpha| < 1$, $|\beta| > 1$ sau $|\alpha| > 1$ şi $|\beta| < 1$, integrala se va reduce la integrala pe γ_1, respectiv γ_2.

II.27. Să se calculeze

$$\int_{-i}^{i} |z|\,dz$$

1° pe un arc de cerc cu extremităţile în punctele i şi $-i$;

2° de-a lungul axei imaginare.

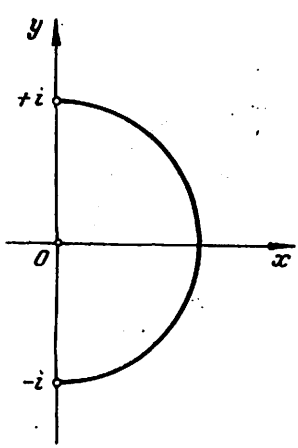


Fig. II.27.

R. Fie arcul de cerc din fig. II.27. Pe acest arc avem $z = e^{i\theta}$, $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$, deci

$$\int_{-i}^{i} |z|\,dz = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\theta}\,d\theta = 2i.$$

2° Pe axa imaginară avem $z = iy$, $dz = i dy$, deci

$$\int_{-i}^{i} |z|\, dz = -i \int_{-i}^{0} y\, dy + i \int_{0}^{i} y dy = -i.$$

Funcţia $|z|$ nu este uniformă, deci integrala depinde de drum.

II.28. Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{e^{iz}}{z^2(1+z)} dz,$$

unde curba C are ecuaţia $4x^2 + y^2 - 1 = 0$.

R. Funcţia

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2(1+z)}$$

este o funcţie meromorfă, avînd originea ca pol dublu şi punctul $z = -1$ pol simplu. Notînd cu R_0, R_{-1} reziduurile funcţiei $f(z)$ relativ la cei doi poli (notaţie utilizată şi în celelalte probeme), avem

$$R_0 = \lim_{z \to 0} \left[\frac{e^{iz}}{1+z} \right]' = i - 1,$$

$$R_{-1} = \lim_{z \to -1} \frac{e^{iz}}{z^2} = \frac{1}{e^i} = e^{-i}.$$

Curba este o elipsă raportată la axele de coordonate, avînd semiaxele $\frac{1}{2}$ şi 1. În interiorul curbei C funcţia $f(z)$ are polul $z = 0$, deci

$$I = 2\pi i R_0 = -2\pi(1 + i).$$

II.29. Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{dz}{z^2 \sin z},$$

C fiind cercul de ecuaţie $|z| = R$, cu $n\pi < R < (n+1)\pi$, ($n =$ = număr natural).

R. Funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$$

este meromorfă avînd polul triplu $z = 0$ şi polii simpli $z = k\pi$, ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$).

În interiorul curbei C funcția are polii $z = 0$ și $z = k\pi$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$, deci

$$I = 2\pi i\left[R_0 + \sum_{k=1}^{n} (R_{k\pi} + R_{-k\pi})\right].$$

Avem

$$R_{k\pi} = \lim_{z\to k\pi} \frac{z - k\pi}{z^2 \sin z} = \frac{1}{k^2\pi^2} \lim_{\zeta\to 0} \frac{\zeta}{\sin(\zeta + k\pi)} = \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2},$$

de unde rezultă că

$$R_{k\pi} + R_{-k\pi} = \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2}.$$

Pentru a calcula reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul $z = 0$, vom folosi dezvoltarea în serie de puteri ale lui z a funcției $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{360} + \ldots,\right),$$

deci

$$R_0 = \frac{1}{6}.$$

Avînd în vedere valorile determinate pentru reziduuri, deducem

$$I = 2\pi i\left[\frac{1}{6} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2}\right].$$

II.30. Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{dz}{(1+z^4)\sqrt{1+z^2}},$$

unde C este parabola $y^2 = x$, în sensul y-cilor crescători. Pentru radical se consideră determinarea care în origine ia valoarea 1.

R. Funcția

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^4)\sqrt{1+z^2}}$$

are două puncte critice $z = \pm i$ și patru poli simpli

$$z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ z_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Funcţia $f(z)$ fiind regulată în punctul de la infinit, putem considera conturul din fig. II.30. În interiorul domeniului de integrat funcţia are polii $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ şi $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, iar reziduurile relative la aceşti poli sînt

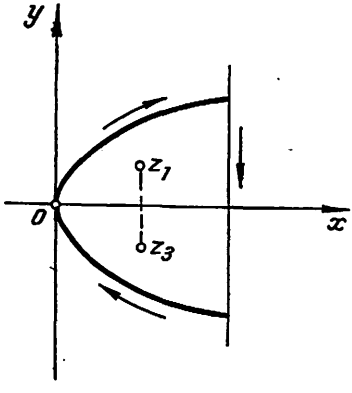


Fig. II30

$$R_{z_1} = \lim_{z \to z_1} \frac{z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{(1+z^4)\sqrt{1+z^2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+i}}{4\sqrt{2}}, \quad R_{z_3} = -\frac{\sqrt{1-i}}{4\sqrt{2}}.$$

Rezultă

$$\int_C \frac{dz}{(1+z^4)\sqrt{1+z^2}} =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left[\sqrt{1+i} + \sqrt{1-i}\right] = \frac{\pi i}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

II.31. Să se calculeze integrala

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}\,dz$$

pe cercul C de centrul O şi rază R

1° aplicînd direct teorema reziduurilor;

2° făcînd schimbarea de variabilă $z = \frac{1}{t}$.

R. 1° Funcţia $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$ admite $z = 1$ pol simplu şi $z = 0$ punct singular esenţial.

Pentru a determina reziduul funcţiei relativ la origine, vom dezvolta funcţia $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$ în serie de puteri ale lui z în jurul originii.

Făcînd produsul dezvoltărilor

$$\frac{1}{e^z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots,$$

$$\frac{1}{z-1} = 1 - z - z^2 - \ldots - z^n - \ldots,$$

găsim

$$a_{-1} = -1 - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!} - \ldots = 1 - e,$$

deci

$$R_0 = 1 - e.$$

Reziduul funcției $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$ relativ la punctul $z = 1$ este

$$R_1 = \lim_{z \to 1} \left[(z-1) \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} \right] = e.$$

Dacă $R < 1$, în interiorul cercului γ avem numai punctul $z = 0$, deci $I = 1 - e$.
Dacă $R > 1$, în interiorul cercului γ avem și punctul $z = 1$, deci $I = 1 - e + e = 1$.
2° Făcînd schimbarea de variabilă $z = 1/t$, t va descrie în sens negativ un cerc γ' de rază $1/R$.

Dacă γ' este descris în sens direct, integrala devine

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{e^t}{t(1-t)} dt.$$

Funcția $f(t) = \dfrac{e^t}{t(1-t)}$ este meromorfă. Ea are pe $t = 0$ și $t = 1$ ca poli simpli cu reziduurile

$$R_0 = \lim_{t \to 0} \frac{e^t}{1-t} = 1, \quad R_1 = \lim_{t \to 1} \frac{-e^t}{t} = -e.$$

Dacă $R < 1$, atunci $\dfrac{1}{R} > 1$, deci polii în interiorul cercului γ' și $I = 1 - e$.

Dacă $R > 1$, atunci $\dfrac{1}{R} < 1$ și în interiorul lui γ' avem numai $t = 0$, deci $I = 1$.

II.32. Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{\sqrt{1+z^2}}{(1-z^2)(z^2-4)} dz,$$

unde pentru radical se consideră ramura care în origine ia valoarea 1, iar curba C este una din curbele de ecuații :

1° $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2° $\frac{x^2}{2} + 4y^2 - 1 = 0$ pentru $x > 0$ și $x + y - \frac{1}{4} = 0$ pentru $x < 0$;

3° $|z| = \sqrt{2}$;

4° $x^2 + y^2 - 1 = 0$ pentru $x > 0$ și $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$ pentru $x < 0$.

R. Avînd în vedere ramura considerată pentru radical, funcția

$$f(z) = \frac{\sqrt{1 + z^2}}{(1 - z^2)(z^2 - 4)}$$

este uniformă în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele critice $z = \pm i$. De asemenea funcția este uniformă în planul complex din care am scos segmentul $[-i, i]$.

Funcția $f(z)$ are ca poli simpli punctele $z = \pm 1$, $z = \pm 2$.

Reziduurile funcției relative la acești poli sînt

$$R_1 = -\left.\frac{\sqrt{1 + z^2}}{(1 + z)(z^2 - 4)}\right|_{z=1} = +\frac{\sqrt{2}}{6}, \quad R_{-1} = \left.\frac{\sqrt{1 + z^2}}{(1 - z)(z^2 - 4)}\right|_{z=-1} = -\frac{\sqrt{2}}{6},$$

$$R_2 = \left.\frac{\sqrt{1 + z^2}}{(1 - z^2)(z + 2)}\right|_{z=2} = -\frac{\sqrt{5}}{12}, \quad R_{-2} = \left.\frac{\sqrt{1 + z^2}}{(1 - z^2)(z - 2)}\right|_{z=-2} = +\frac{\sqrt{5}}{12}.$$

În cazul 1° există un domeniu D care conține curba C, dar nu conține punctele critice $z = \pm i$ (fig. II.32, *a*). În interiorul lui funcția $f(z)$ este olomorfă și $I = 0$.

În cazul 2° există un domeniu D care conține curba C, dar nu conține punctele critice $z = \pm i$. În exteriorul lui funcția $f(z)$ are polul simplu $z = 1$ (fig. II.32, *b*), deci

$$I = 2\pi i R_1 = \frac{\pi i \sqrt{2}}{3}.$$

În cazul 3° domeniul D este un domeniu din care s-a scos segmentul $[-i, i]$, (fig. II.32, *c*). În acest domeniu funcția $f(z)$ este uniformă avînd polii simpli $z = \pm 1$. Avem

$$I = 2\pi i(R_1 + R_{-1}) = 0.$$

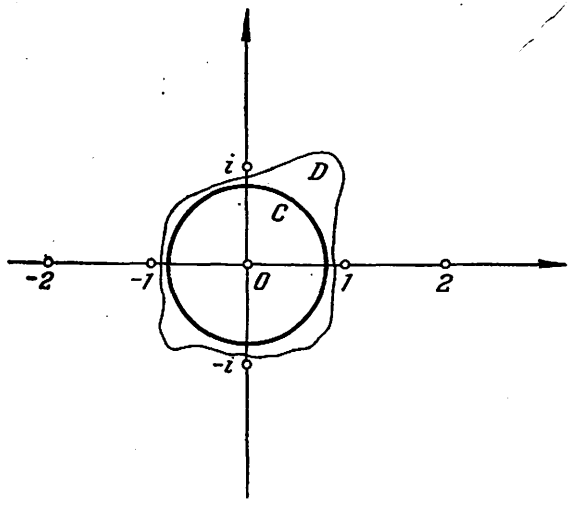


Fig. II.32, *a*

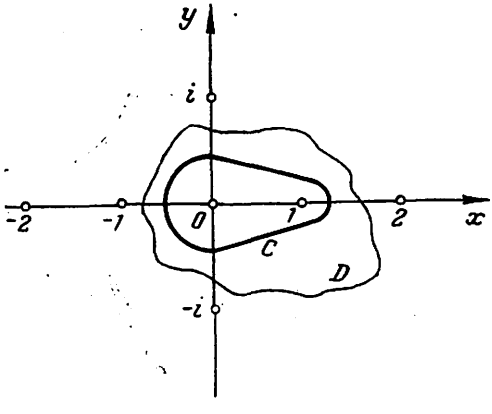


Fig. II.32, *b*

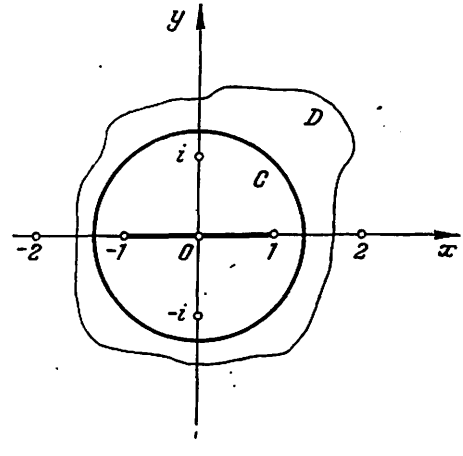


Fig.32, *c*

În cazul 4° domeniul D este un domeniu din care s-a scos segmentul $[-i, i]$ şi care conţine curba C (fig. II.32, d). În acest domeniu funcţia $f(z)$ este uniformă şi are polii simpli $z = \pm 1$, $z = -2$. Avem

$$I = 2\pi i(R_{+1} + R_{-1} + R_{-2}) = \frac{\pi i\sqrt{5}}{6}.$$

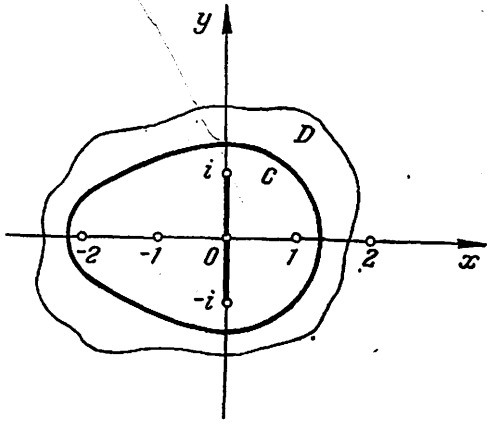


Fig. II.32, d

II.33. Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{z^{a+ib-1}}{1+z}\, dz,$$

unde a şi b sînt două numere reale cu $0 < a < 1$, iar C este conturul din fig. II.33.

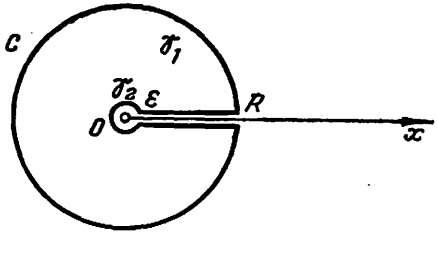


Fig. II.33

R. Funcţia

$$f(z) = \frac{z^{a+ib-1}}{1+z}$$

are originea ca punct critic, iar punctul $z = -1$ pol simplu. Această funcţie este olomorfă în planul complex în care am făcut o tăietură care uneşte originea cu punctul de la infinit de-a lungul semiaxei reale pozitive. În planul complex cu această tăietură determinarea lui z^{a+ib-1} este bine precizată dacă luăm spre exemplu

$$z^{a+ib-1} = e^{(a+ib-1)\,|\ln x}$$

într-un punct de abscisă reală pozitivă x, deasupra tăieturii, ln x fiind determinarea reală a logaritmului.

Reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la polul $z = -1$ este valoarea în acest punct a lui $z^{a+ib-1} = e^{(a+ib-1)\ln z}$.

Dacă într-un punct $z = x$ (deasupra tăieturii) argumentul lui z este 0, atunci în $z = -1$, ln $z = i\pi$, deci

$$R_{-1} = e^{(a+ib-1)\,i\pi} = e^{\pi[-b+i(a-1)]} = -e^{\pi(ai-b)}.$$

Deci

$$\int_C f(z)\,dz = -2\pi i e^{\pi(ai-b)}. \tag{1}$$

Dar

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} (z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{R} f(z)\,dz + \int_{R}^{\varepsilon} f(z)\,dz. \tag{2}$$

Ţinînd seama că $0 < a < 1$, rezultă că raportul

$$\left|\frac{z^{a+ib-1}}{1+z}\right| = \frac{|z|^a}{|1+z|}$$

tinde la zero cînd $|z| \to 0$ sau cînd $|z| \to \infty$, deci

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0, \text{ şi } \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0. \tag{3}$$

Pe partea de deasupra tăieturii avem

$$\int_{\varepsilon}^{R} f(z)\,dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^{a+ib-1}}{1+x}\,dx, \tag{4}$$

unde x^{a+ib-1} este definit prin $e^{(a+ib-1)\ln x}$.

Pe partea de jos a tăieturii avem

$$z^{a+ib-1} = e^{(2\pi i+\ln x)(a+ib-1)} = e^{2\pi(ai-b)}x^{a+ib-1},$$

deci

$$\int_R^\varepsilon f(z)\,dz = e^{2\pi(a-ib)} \int_R^\varepsilon \frac{x^{a+ib-1}}{1+x}\,dx. \tag{5}$$

Trecînd la limită în egalitatea (2) și ținînd seama de relațiile (1), (3), (4) și (5), obținem

$$[1 - e^{2\pi(a-ib)}] \int_0^\infty \frac{x^{a+ib-1}}{1+x}\,dx = -2\pi i e^{\pi(ai-b)},$$

adică

$$\int_0^\infty \frac{x^{a+ib-1}}{1+x}\,dx = -\frac{2\pi i e^{\pi(ai-b)}}{1-e^{2\pi(a-ib)}}.$$

Observație. În rezultatul obținut, dacă luăm $a = \frac{1}{2}$, avem

$$(1 + e^{-2\pi b}) \int_0^\infty \frac{x^{ib-\frac{1}{2}}}{1+x}\,dx = 2\pi e^{-\pi b}$$

sau

$$\int_0^\infty \frac{x^{ib-\frac{1}{2}}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi b}.$$

Punînd $x = e^{2t}$, $b = \omega$, obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\operatorname{ch} t}\,dt = \frac{\pi}{\operatorname{ch}\frac{\omega\pi}{2}}, \text{ de unde } \int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{\operatorname{ch} t}\,dt = \frac{\pi}{2\operatorname{ch}\frac{\omega\pi}{2}}.$$

ω fiind real.

II.34. Să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{\ln\frac{z-1}{z+1}}{(z^2+1)(z^2-4)}\,dz,$$

unde pentru logaritm se consideră determinarea care în origine are valoarea πi, iar conturul C este:

1° $|z| = \frac{1}{2}$;

2° $3x^2 + y^2 - 2 = 0$;

3° $|z| = \sqrt{2}$;

4° $|z| = 3$.

R. Funcţia $\ln \frac{z-1}{z+1}$ are ca puncte critice punctele $z = \pm 1$. Fiecare determinare a acestei funcţii este uniformă în orice domeniu simplu conex care nu conţine punctele $z = \pm 1$ sau în tot planul complex din care este scos segmentul $[-1, 1]$.

Funcţia

$$f(z) = \frac{\ln \frac{z-1}{z+1}}{(z^2+1)(z^2-4)}$$

are ca poli simpli punctele $z = \pm i$, $z = \pm 2$.

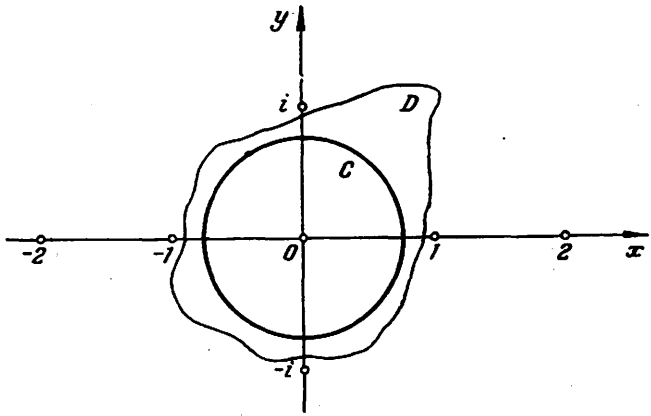


Fig. II.34, *a*

În cazul 1° există un domeniu D care conţine curba C şi în interiorul căruia nu există nici unul din punctele $z = \pm 1$, $z = \pm i$, $z = \pm 2$ (fig. II.34, *a*). În interiorul lui D funcţia $f(z)$ este olomorfă şi

$$I = 0.$$

În cazul 2° considerăm domeniul D, un domeniu care conţine curba C în interior dar nu conţine nici unul din punctele $z = \pm 1$, $z = \pm 2$ (fig. II.34, *b*). În acest domeniu funcţia $f(z)$ este meromorfă avînd poli simpli $z = \pm i$ cu reziduurile relativ la aceşti poli

$$R_i = \lim_{z \to i} \frac{\ln \frac{z-1}{z+1}}{(z+i)(z^2-4)} = -\frac{\pi}{20}, \quad R_{-i} = \lim_{z \to -i} \frac{\ln \frac{z-1}{z+1}}{(z-i)(z^2-4)} = \frac{-\pi}{20},$$

deci

$$I = 2\pi i(R_i + R_{-i}) = \frac{\pi^2 i}{-5}.$$

În cazul 3° considerăm domeniul D care conține curba C fără să conțină punctul ± 2 și din care am scos segmentul $[-1, 1]$, (fig. II.34, *c*). În acest domeniu, funcția $f(z)$ este meromorfă avînd polii simpli $z = \pm i$, deci avem

$$I = 2\pi i(R_i + R_{-i}) = \frac{\pi^2 i}{-5}.$$

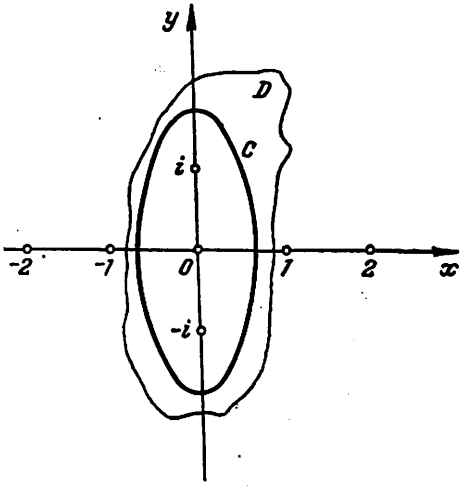


Fig. II.34, *b*

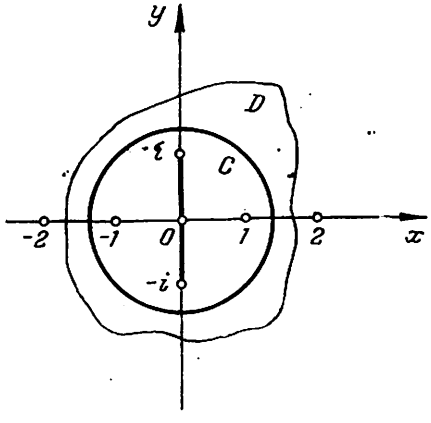


Fig. II.34, *c*

În cazul 4° domeniul D conține în interior curba C și din care s-a scos segmentul $[-1, 1)]$, (fig. II.34, *d*). În acest domeniu funcția $f(z)$ este meromorfă avînd polii simpli $z = \pm i$, $z = \pm 2$, deci

$$I = 2\pi i(R_i + R_{-i} + R_2 + R_{-2}),$$

unde

$$R_2 = \lim_{z \to 2} \frac{\ln \dfrac{z-1}{z+1}}{(z^2+1)(z+2)} = -\frac{\ln 3}{20}, \quad R_{-2} = \lim_{z \to -2} \frac{\ln \dfrac{z-1}{z+1}}{(z^2+1)(z-2)} = \frac{-\ln 3}{20},$$

de unde

$$I = \frac{\pi i}{5}[\pi - \ln 3].$$

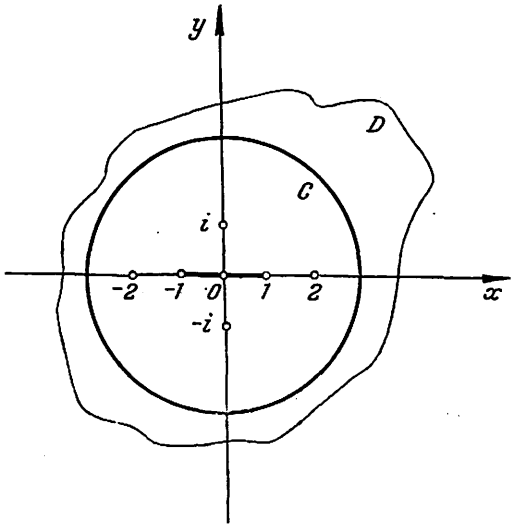


Fig. II.34, *d*

II.35. Să se calculeze reziduurile funcției

$$f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}.$$

R. Funcția $f(z)$ are poli de ordinul n în $z = -1$ și $z = \infty$.

Pentru a calcula reziduul acestei funcții relativ la polul $z = -1$, o vom dezvolta în serie în jurul punctului $z = -1$. Avem

$$\frac{z^{2n}}{(1+z)^n} = \frac{1}{(1+z)^n}[1-(1+z)]^{2n} = \frac{1}{(z+1)^n}\left[1 - \frac{2n}{1!}(1+z) + \right.$$

$$\left. + \frac{2n(2n-1)}{2!}(1+z)^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2n(2n-1)\ldots[2n-(n-2]}{(n-1)!}(1+z)^{n-1} + \cdots\right]$$

de unde

$$R_{-1} = (-1)^{n-1}\frac{2n(2n-1)\cdots[2n-(n-2)]}{(n-1)!} = (-1)^{n+1}C_{2n}^{n+1}.$$

În vecinătatea punctului de la infinit avem dezvoltarea

$$\frac{z^{2n}}{(1-z)^n} = z^n\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-n} =$$

$$= z^n\left[1 - \frac{n}{z} + \frac{n(n+1)}{2!}\frac{1}{z^2} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)\ldots(n+n)}{(n+1)!}\frac{1}{z^{n+1}} + \ldots\right].$$

Rezultă

$$R_\infty = (-1)^n C_{2n}^{n+1}.$$

II.36. Să se calculeze reziduul în origine al funcţiei

$$f(z) = \frac{e^{\lambda z + \frac{z^2}{2}}}{z^{n+1}}, \quad n \text{ întreg.}$$

R. Reziduul va fi coeficientul lui z^n din dezvoltarea funcţiei $e^{\lambda z + \frac{z^2}{2}}$ în serie în jurul originii. Pentru calcularea acestui coeficient putem proceda în diverse moduri.

1°
$$e^{\lambda z} = 1 + \lambda z + \cdots + \frac{\lambda^n z^n}{n!} + \cdots,$$

$$e^{\frac{z^2}{2}} = 1 + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^{2m}}{2^m m!} + \cdots$$

Făcînd produsul acestor dezvoltări, găsim pentru coeficientul lui z^n:

$$R_{-1} = \frac{\lambda^n}{n!} + \frac{\lambda^{n-2}}{2(n-2)!} + \frac{\lambda^{n-4}}{2^2(n-1)!\,2!} + \cdots$$

2° Scriind $e^{\lambda z + \frac{z^2}{2}} = 1 + \left(\lambda z + \frac{z^2}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\lambda z + \frac{z^2}{2}\right)^k + \cdots$

şi căutînd coeficientul lui z^n în termenii pentru care $k \leqslant n \leqslant 2k$, avem acelaşi rezultat ca la 1°.

3° Dacă scriem

$$e^{\lambda z + \frac{z^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}(z+\lambda)^2} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

şi dezvoltăm funcţia $\varphi(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$ în serie Taylor, considerînd z crescător, avem

$$e^{\frac{1}{2}(\lambda+z)^2} = \varphi(\lambda + z) = \varphi(\lambda) + \cdots + \frac{z^n}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\varphi(\lambda) + \cdots,$$

de unde

$$R_{-1} = \frac{1}{n!} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \frac{d^n}{d\lambda^n}\left(e^{\frac{\lambda^2}{2}}\right).$$

II.37. Să se calculeze

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)}.$$

R. Să considerăm integrala

$$\int_C \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2(z^2 + b^2)},$$

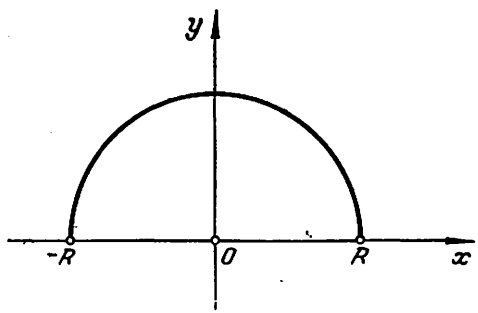


Fig. II.37

unde conturul C este format din segmentul $[-R, R]$ și semicercul de ecuație $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, unde $R > a$, $R > b$, (fig. II.37). Această integrală se scrie

$$\int_C \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2(z^2 + b^2)} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2(z^2 + b^2)}, \quad (1)$$

deoarece pe axa reală avem $z = x$.

Funcția $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + a^2)^2(z^2 + b^2)}$ are punctele $z = \pm ib$ $(b > 0)$ poli simpli și punctele $z = \pm ia$, $(a > 0)$, ca poli dubli. În interiorul conturului C funcția $f(z)$ are polii $z_1 = ia$ și $z_2 = ib$. Deci

$$\int_C \frac{dz}{(z^2 + a^2)^2(z^2 + b^2)} = 2\pi i(R_{z_1} + R_{z_2}).$$

Avem

$$R_{z_1} = \left[\frac{1}{(z + ai)^2(z^2 + b^2)}\right]'_{z=ai} = \frac{b^2 - 3a^2}{4ia^3(b^2 - a^2)^2},$$

$$R_{z_2} = \left[\frac{1}{(z + bi)(z^2 + a^2)^2}\right]_{z=bi} = \frac{1}{2bi(b^2 - a^2)^2},$$

deci

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)} = \frac{\pi(2a+b)}{2a^3b(a+b)^2}. \tag{2}$$

Dar

$$|zf(z)| = \left|\frac{z}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)}\right| \to 0 \text{ pentru } |z| \to \infty,$$

deci

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)} = 0.$$

Trecînd la limită în relația (1) pentru $R \to \infty$ și ținînd seama de relația (2), rezultă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)} = \frac{\pi(2a+b)}{2a^3b(a+b)^2}.$$

II.38. Să se calculeze integrala lui Poisson

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

R. Această integrală se calculează integrînd funcția $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ pe conurul format de semicercurile Γ și γ situate deasupra axei Ox, cu centrele în O și cu razele R și r și segmentele de pe axa reală $[-R, -r]$ și $[r, R]$, (fig. II.38).

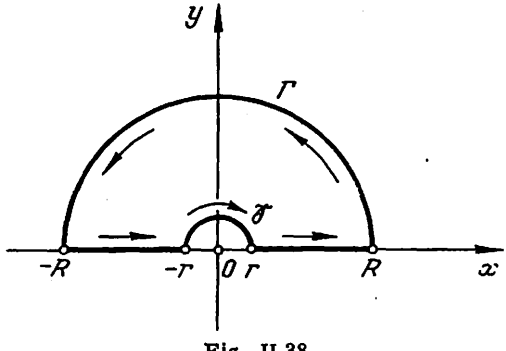


Fig. II.38

Avem

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0,$$

deoarece funcția $f(z)$ este olomorfă în interiorul conturului de integrare. Putem scrie

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx = 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Deoarece

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + \frac{i}{1!} + \frac{i^2}{2!}z + \cdots + \frac{i^n}{n!}z^{n-1} + \cdots,$$

avem

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \left(\ln z + \frac{i}{1!}z + \frac{i^2}{2!\,2}z^2 + \cdots\right)_\gamma.$$

Dar

$$(\ln z)_\gamma = \ln - (\ln r + i\pi) = -i\pi,$$

deci

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz \to -i\pi$$

pentru $r \to 0$ deoarece termenii rămași tind la zero împreună cu r.

Integrînd prin părți, avem

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \left(\frac{1}{i}\frac{e^{iz}}{z}\right)_\Gamma + \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz.$$

Pe Γ avem $z = Re^{i\theta}$, $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ și

$$|e^{iz}| = |e^{iR\cos\theta - R\sin\theta}| = e^{-R\sin\theta} \leqslant 1$$

Deci pentru $R \to \infty$

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz \to 0$$

și termenul integrat tinde și el la zero cînd $R \to \infty$.

Făcînd $R \to \infty$ și $r \to 0$, egalitatea obținută din teorema reziduurilor ne dă

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

II.39. Să se calculeze integralele lui Fresnel

$$I_1 = \int_0^\infty \sin x^2\,dx, \quad I_2 = \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

R. Vom integra funcția $f(z) = e^{-z^2}$ pe conturul din fig. II.39. Teorema reziduurilor ne dă

$$\int_0^R e^{-x^2}\,dx + \int_{AB} e^{-z^2}\,dz + \int_{BO} e^{-z^2}\,dz = 0, \qquad (1)$$

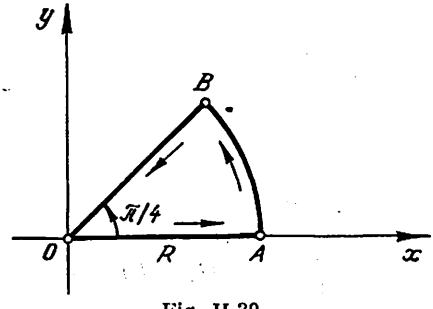


Fig. II.39

deoarece e^{-z^2} este o funcție întreagă. Făcînd pe $R \to \infty$ în această egalitate, prima integrală tinde către integrala lui Gauss

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pe arcul AB, avem

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta), \quad |e^{-z^2}| = e^{-R^2\cos 2\theta} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Integrînd prin părți, avem

$$\int_{AB} e^{-z^2}\,dz = \int_{AB} \frac{ze^{-z^2}}{z}\,dz = \left(-\frac{1}{2}\,\frac{e^{-z^2}}{z}\right)_{AB} - \frac{1}{2}\int_{AB} \frac{e^{-z^2}}{z^2}\,dz.$$

Avem

$$|zf(z)| = \left|\frac{e^{-z^2}}{z}\right| \leqslant \frac{1}{R},$$

deci

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0,$$

rezultă

$$\lim_{R\to\infty} \int_{AB} \frac{e^{-z^2}}{z^2}\,dz = 0.$$

Pe bisectoarea OB, avem

$$z = re^{i\frac{\pi}{4}}, \quad dz = e^{i\frac{\pi}{4}}\, dr,$$

de unde

$$\int_{BO} e^{-z^2} dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_R^0 e^{-ir^2} dr = -e^{i\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^R \cos r^2\, dr - i \int_0^R \sin r^2\, dr \right],$$

prin, urmare, cînd $R \to \infty$, atunci

$$\int_{BO} e^{-z^2} dz \to e^{-i\frac{\pi}{4}} (I_2 - iI_1).$$

În consecință, la limită, egalitatea (1) devine

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{i\frac{\pi}{4}} (I_2 - iI_1) = 0,$$

de unde

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

II.40. Să se calculeze

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos (nx - \sin x)\, dx.$$

R. Facem schimbarea de variabilă $z = e^{ix}$, Avem

$$\cos (nx - \sin x) = \frac{1}{2} [e^{i(nx - \sin x)} + e^{-i(nx - \sin x)}] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[z^n e^{-\frac{1}{2}(z - z^{-1})} + z^{-n} e^{\frac{1}{2}(z - z^{-1})} \right] = \frac{1}{2z^n} \left[z^{2n} e^{-\frac{1}{2}(z - z^{-1})} + e^{\frac{1}{2}(z - z^{-1})} \right].$$

Integrala devine

$$I = \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{2}(z - z^{-1})} \frac{z^{2n} e^{-\frac{1}{2}(z - z^{-1})} + e^{-\frac{1}{2}(z - z^{-1})}}{2z^n} \cdot \frac{dz}{iz} =$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{z^{2n} e^{\frac{1}{z}} + e^z}{z^{n+1}}\, dz = 2\pi i R_0.$$

Pentru a determina reziduul funcției $\frac{z^n e^{\frac{1}{z}} + e^z}{z^{n+1}}$ în punctul $z = 0$, vom dezvolta în serie această funcție în vecinătatea punctului $z = 0$. Avem dezvoltarea

$$\frac{z^{2n} e^{\frac{1}{z}} + e^z}{z^{n+1}} =$$

$$= \frac{z^{2n}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \ldots\right) + \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots\right)}{z^{n+1}} =$$

$$= \frac{2}{n!} \cdot \frac{1}{z} + \ldots,$$

de unde rezultă

$$R_0 = \frac{2}{n!},$$

deci

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(nx - \sin x)\, dx = \frac{2\pi}{n!}.$$

II.41. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{1 - 2p\cos 2x + p^2}\, dx, \text{ unde } 0 < p < 1.$$

R. Facem schimbarea de variabilă $z = e^{ix}$ și avem

$$dx = \frac{dz}{iz}, \quad \cos 2x = \frac{1}{2}\left[z^2 + \frac{1}{z^2}\right], \quad \cos 3x = \frac{1}{2}\left[z^3 + \frac{1}{z^3}\right]$$

și

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{1 - 2p\cos 2x + p^2}\, dx = \frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{(z^3 + z^{-3})^2\, dz}{z(1 - pz^2)(1 - pz^{-2})}.$$

Funcția $f(z) = \frac{(z^6 + 1)^2}{z^5(1 - pz^2)(z^2 - p)}$ are în interiorul cercului $|z| = 1$, polii $z = 0$, $z = \sqrt{p}$, $z = -\sqrt{p}$.

Aplicînd teorema reziduurilor, obținem

$$\frac{1}{4i}\int \frac{(z^6 + 1)^2}{z^5(1 - pz^2)(z^2 - p)}\, dz = \frac{\pi}{2}\,[R_{z_0} + R_{z_1} + R_{z_2}],$$

unde

$$R_{z_0} = -\frac{1 + p^2 + p^4}{p^3}, \quad R_{\sqrt{p}} = \frac{(1 + p^3)^2}{2p^3(1 - p^2)}, \quad R_{-\sqrt{p}} = \frac{(1 + p^3)^2}{2p^3(1 - p^2)}.$$

Rezultă

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{1 - 2p\cos 2x + p^2}\, dx = \frac{\pi(p^2 - p + 1)}{1 - p}.$$

II.42. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1 - x)}}{(x + a)^3}\, dx, \text{ } a \text{ fiind un număr pozitiv.}$$

R. Funcţia

$$f(z) = \frac{\sqrt[3]{z^2(1 - z)}}{(z + a)^3}$$

are punctele critice $z_1 = 0$ şi $z_2 = 1$, iar $z_3 = -a$ este pol triplu. Vom calcula

$$\int_C f(z)\, dz$$

unde C este conturul din fig. II.42.

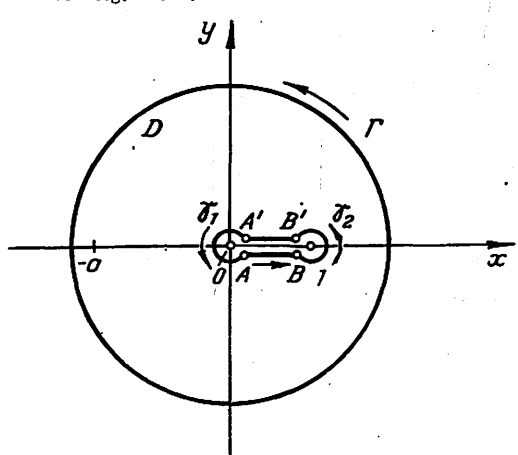


Fig. II.42

Aplicînd teorema reziduurilor, putem scrie

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz - \int_{\gamma} (z)\,dz = 2\pi i R_{z_3} = -a, \tag{1}$$

unde conturul γ este format din segmentele $AB \,||\, A'B' \,||\, Ox$ şi cercurile de rază ε cu centrele în 0 şi 1.

În domeniul D funcţia este uniformă. Dar

$$|zf(z)| = \left| \frac{z\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(z+a)^3} \right| \to 0 \text{ pentru } |z| \to 0 \text{ şi } |z| \to \infty. \tag{2}$$

Rezultă că

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Pentru a calcula integralele pe conturul γ, să considerăm că z pleacă din punctul $A(\varepsilon, 0)$ cu determinarea reală pentru radical. Avem

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Cînd z ajunge în B, el s-a notat cu 2π pe cercul de centrul 1 şi rază ε, deci $(1-z)^{1/2}$ ajunge în B' cu valoarea din B multiplicată cu $e^{\frac{2}{3}\pi i}$, deci

$$\int_{B'A'} f(z)\,dz = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Integralele pe cercurile γ_1 şi γ_2 tind la zero. Avem

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) I = -2\pi i R_{z_3},$$

iar

$$R_{z_3} = \frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{z^2(1-z)}\right]''_{z=-a} = -\frac{2}{9}\left[\sqrt[3]{z^2(1-z)}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z(1-z)} + \frac{1}{(1-z)^2}\right)\right].$$

Pentru a determina valoarea funcţiei $\sqrt[3]{z^2(1-z)}$ în punctul $z = -a$, să observăm că plecînd din A cu valoarea reală, z descrie în jurul lui O un semicerc în sens invers şi $\sqrt[3]{z^2}$ se multiplică cu $e^{-\frac{2\pi i}{3}}$, deci în $z = -a$ avem pentru radical valoarea

$$e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{a^2(1+a)}.$$

Deci

$$R_{z_3} = -\frac{1}{9} e^{-\frac{2\pi i}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{a^4(1+a)^5}},$$

de unde

$$I = \frac{2\pi i}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{a^4(1+a)^5}} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} a^{-\frac{4}{3}}(1+a)^{-\frac{5}{3}}.$$

Avem

$$\int_{\Gamma} \frac{z^{(p-1)}}{1+z} dz + \int_{R}^{\varepsilon} \frac{e^{(p-1)(\ln x + 2\pi i)}}{1+x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+z} dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{(p-1)\ln z}}{1+x} dx =$$

$$= 2\pi i R_{-1} = 2\pi i e^{(p-1)\pi i}. \qquad (1)$$

Dar

$|zf(z)| = \left| \frac{z^p}{1+z} \right|$ tinde la zero pentru $|z| \to 0$ şi $|z| \to \infty$, deci integralele pe Γ şi γ tind către zero cînd R tinde la infinit şi ε tinde la zero.

Trecînd la limită pentru $R \to \infty$ şi $\varepsilon \to 0$ în relaţia (1), obţinem

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{(p-1)\ln x}}{1+x} dx + \int_{\infty}^{0} \frac{e^{(p-1)\cdot(\ln x + 2\pi i)}}{1+x} dx = 2\pi i e^{(p-1)\pi i},$$

de unde

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

II.43. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1-x} dx, \ (0 < p < 1.)$$

R. Să considerăm funcţia

$$f(z) = \frac{z^{p-1}}{1-z}$$

pe care o vom integra pe conturul C din fig. II.43 în interiorul căruia este uniformă, deci

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Această integrală se mai scrie

$$\int_{AB} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1^+} f(z)\,dz + \int_{CD} f(z)\,dz + \int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{EF} f(z)\,dz +$$

$$+ \int_{\gamma_1^-} f(z)dz + \int_{GH} f(z)dz + \int_{\gamma} f dz = 0. \qquad (1)$$

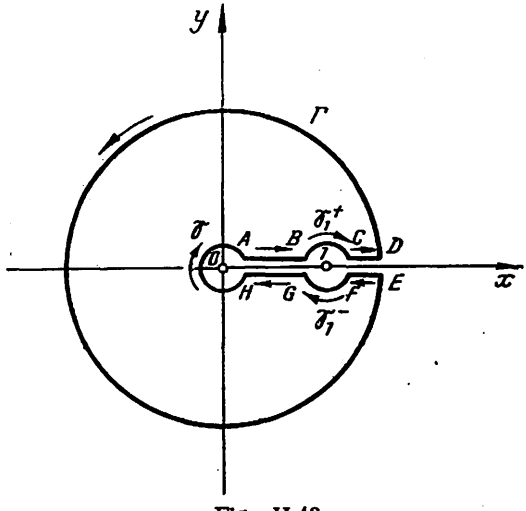


Fig. II.43

Dacă pe AB luăm $\arg z = 0$, pe GH avem $\arg z = 2\pi$ şi deci

$$\int_{AB+CD} \frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx + e^{2\pi i p} \int_{EF+GH} \frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx = (1 - e^{2\pi i p}) \int_{AB+CD} \frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx.$$

În vecinătatea punctului $z = 1$ avem dezvoltarea

$$\frac{z^{p-1}}{1-z} = \frac{[1+(z-1)]^{p-1}}{1-z} = \frac{1 + (p-1) + \frac{(p-1)(p-2)}{2!}(z-1)^2 + \dots}{1-z},$$

deci

$$\int_{\gamma_1^+} \frac{z^{p-1}}{1-z}\,dz = \int_{\pi}^{0} \frac{dz}{1-z} - (p+1)\int_{\pi}^{0} dz - \dots$$

Dacă punem $z - 1 = \rho e^{i\theta}$,

$$\int_{\gamma_1^+} \frac{z^{p-1}}{1-z}\, dz = \pi i + o(\rho),$$

unde cantitatea $o(\rho)$ tinde la zero o dată cu ρ.

Analog se obține

$$\int_{\gamma_1^-} \frac{z^{p-1}}{1-z}\, dz = \pi i e^{2\pi i p} + o(\rho).$$

Trecînd la limită în relația (1) pentru $\rho \to 0$, $R \to \infty$ și $\varepsilon \to 0$, unde R este raza cercului Γ iar ε este raza cercului γ și ținînd seama de faptul că

$$|zf(z)| = \left| \frac{z^p}{1-z} \right| \to 0 \text{ pentru } \varepsilon \to 0, \ (\varepsilon = |z|),$$

obținem

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1-x}\, dx = -\pi i \frac{1+e^{2\pi i p}}{1-e^{2\pi i p}} = \pi \operatorname{cotg} \pi p.$$

II.44. Să se calculeze integrala

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\alpha x}\sqrt{x}}{x^2+\omega^2}\, dx.$$

R. Funcția

$$f(z) = \frac{e^{\alpha z}\sqrt{z}}{z^2+\omega^2}$$

are pe $z = 0$ punct critic iar punctele $z = \pm i\omega$ poli simpli. Vom considera conturul C din fig. II.44

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz - \int_{-\varepsilon}^{-R} f(z)\, dz - \int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)\, dz +$$

$$+ \int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, [R_{i\omega} + R_{-i\omega}].$$

Dar $|zf(z)| \to 0$ pentru $|z| \to \infty$, deci

$$\int_\Gamma f(z)\, dz \to 0 \text{ pentru } R \to \infty.$$

Pentru a calcula int egrala pe γ scriem $z=\varepsilon e^{i\theta}$ şi cum $|z| \lhd \omega$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\omega^2}\int_0^{2\pi} e^{i\varepsilon(\cos\theta+i\sin\theta)}\,\varepsilon^{3/2}\,e^{3/2 i\theta}\,d\theta = 0.$$

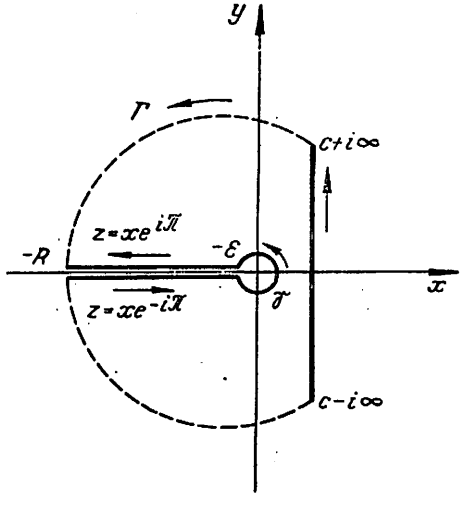


Fig II.44

Pe tăietura de sus $z = |x|\,e^{i\pi}$, avem

$$\int_{-\varepsilon}^{-R} f(z)\,dz \xrightarrow[\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}]{} -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x\alpha}\sqrt{x}}{x^2+\omega^2}\,dx.$$

Pe tăietura de jos $z = |x|\,e^{-i\pi}$, deci

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)\,dz \xrightarrow[\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}]{} \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0}\frac{e^{-\alpha x}\sqrt{x}}{x^2+\omega^2}\,dx.$$

Reziduul relativ la punctul $z = i\omega$ este

$$R_{i\omega} = \left[\frac{e^{\alpha z}\sqrt{z}}{z+i\omega}\right]_{z=i\omega} = \frac{e^{i\left(\alpha\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}{2i\sqrt{\omega}}.$$

Analog găsim

$$R_{-i\omega} = -\frac{e^{-i\left(\alpha\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}{2i\sqrt{\omega}}.$$

Rezultă

$$I = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\left(\alpha\omega + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\sqrt{x}}{x^2+\omega^2}\,dx.$$

II.45. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}\,dx,\quad a > 0.$$

R. Considerăm integrala

$$\int_C \frac{\sqrt{z}\ln z}{z^2+a^2}\,dz,$$

unde C este conturul din fig. II.45 iar pentru radical luăm determinarea pozitivă şi pentru logaritm determinarea principală.

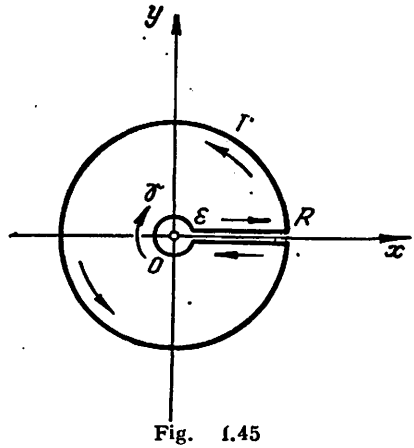


Fig. 1.45

În interiorul conturului C funcţia

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}\ln z}{z^2+a^2}$$

este meromorfă avînd polii simpli $z = \pm ai$, deci

$$\int_C \frac{\sqrt{z}\ln z}{z^2 + a^2}\,dz = 2\pi i(R_{ai} + R_{-ai}).$$

Avem

$$R_{ai} = \lim_{z\to ai} \frac{\sqrt{z}\ln z}{z + ai} = \frac{\sqrt{2a}}{4ai}\left(\ln a + i\,\frac{\pi}{2}\right)(1 + i).$$

$$R_{-ai} = \lim_{z\to -ai} \frac{\sqrt{z}\ln z}{z - ai} = -\frac{\sqrt{2a}}{4a}\left(\ln a + \frac{3\pi}{2}\,i\right)(1 + i),$$

deci

$$\int_C \frac{\sqrt{z}\ln z}{z^2 + a^2}\,dz = \frac{\pi[\pi + 2\ln a]}{\sqrt{2a}} + i\,\frac{2\pi^2}{2a}.$$

Ținînd seama de forma conturului C, putem scrie

$$\int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2 + a^2}\,dx + \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_R^\varepsilon \frac{-\sqrt{x}\,(\ln x + 2\pi i)}{x^2 + a^2}\,dx + \int_\gamma f(z)\,dz =$$

$$= \frac{\pi[\pi + 2\ln a]}{\sqrt{2a}} + i\,\frac{2\pi^2}{2a}.$$

Trecînd la limită în această relație pentru $\varepsilon \to 0$ și $R \to \infty$ și ținînd seama de faptul că

$$|zf(z)| = \left|\frac{z^{3/2}\ln z}{z^2 + a^2}\right| \to 0 \text{ pentru } |z| \to \infty \text{ și deci}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

și analog

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

obținem

$$2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2 + a^2}\,dx + 2\pi i\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi[\pi + 2\ln a] + 2\pi^2 i}{\sqrt{2a}},$$

de unde

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{\pi[\pi + 2\ln a]}{2\sqrt{2a}}; \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}.$$

II.46. Să se calculeze integralele

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^{1+a}}\,dx, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\ln|1-x|}{x^{1+a}}\,dx,$$

unde a este un număr real cuprins între 0 și 1.

R. Considerăm

$$\int_C \frac{\ln(1-z)}{z^{1+a}}\,dz$$

unde C este conturul din fig. II. 46.

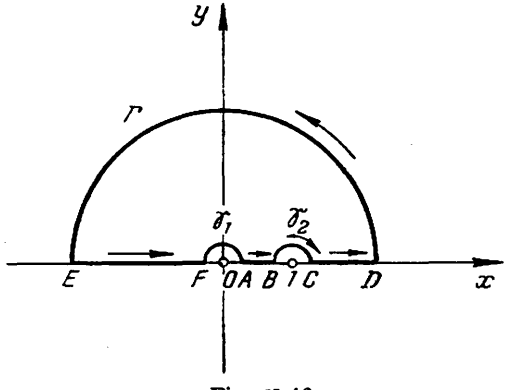


Fig. II.46

Funcția

$$f(z) = \frac{\ln(1-z)}{z^{1+a}}, \qquad 0<a<1,$$

admite punctele $z = 0$ și $z = 1$ ca puncte critice.

În domeniul interior conturului C alegem o determinare uniformă a funcției $f(z)$ și anume determinarea care ia valoarea reală pentru $z \neq x$, cu $0 < x < 1$. Cu accastă determinare în domeniul considerat funcția $f(z)$ este olomorfă.

Să determinăm valoarea $\ln(1-z)$ pe axa reală. Dacă punem $1 - z = re^{i\theta}$, avem

pe $AB: r = 1 - x,\ \theta = 0,\ \ln(1-z) = \ln r = \ln(1-x)$;
pe $CD: r = x - 1,\ \theta = -\pi,\ \ln(1-z) = \ln(x-1) - i\pi$;
pe $EF: r = |x| + 1,\ \theta = 0,\ \ln(1-z) = \ln(|x| + 1)$.

De asemenea pentru z^{1+a} avem:

pe $AB: z^{1+a} = x^{1+a}$;
pe $CD: z^{1+a} = x^{1+a}$;
pe $EF: (\rho e^{i\pi})^{1+a} = -\rho^{1+a}e^{i\pi a}$ cu $\rho = |x| = -x$.

Conform teoremei lui Cauchy avem

$$\int_C \frac{\ln(1-z)}{z^{1+a}}\,dz=0.$$

Ţinînd seama de forma conturului C, avem

$$\int_\Gamma f(z)\,dz+\int_{EF} f(z)\,dz+\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{AB} f(z)\,dz+\int_{\gamma_2} f(z)\,dz+\int_{CD} f(z)\,dz=0.$$

Avem

$$|zf(z)|=\frac{|\ln(1-z)|}{|z|^a}.$$

Punînd

$$1-z=re^{i\theta},\ \ln(1-z)=\ln r+i\theta,$$

cum θ variază de la 0 la π, rezultă că $|\ln(1-z)|$ este de acelaşi ordin de mărime cu $\ln r$ şi deci ţinînd seama că

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln r}{r^a}=0,$$

rezultă

$$\lim_{|z|\to\infty}|zf(z)|=0,$$

deci

$$\lim_{|z|\to\infty}\int_\Gamma f(z)\,dz=0.$$

Analog se arată că

$$\lim_{|z|\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=0 \text{ şi } \lim_{|z-1|\to 0}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz=0.$$

Cu aceasta relaţia (1) devine

$$-e^{-i\pi a}\int_0^\infty \frac{\ln(\rho+1)}{\rho^{1+a}}\,d\rho+\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{1+a}}\,dx+\int_1^\infty \frac{\ln(x-1)-i\pi}{x^{1+a}}\,dx=0.$$

Avînd în vedere că $e^{-i\pi a}=\cos\pi a-i\sin\pi a$, rezultă

$$-\cos\pi a\int_0^\infty \frac{\ln(\rho+1)}{\rho^{1+a}}\,d\rho+\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{1+a}}\,dx+\int_1^\infty \frac{\ln(x-1)}{x^{1+a}}\,dx=0$$

şi

$$\sin \pi a \int_0^\infty \frac{\ln(\rho+1)}{\rho^{1+a}}\, d\rho - \pi \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+a}} = 0.$$

Dar $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+a}} = \frac{1}{a}$, deci

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^{1+a}}\, dx = \frac{\pi}{a \sin \pi a}; \quad \int_0^\infty \frac{\ln|1-x|}{x^{1+a}}\, dx = \frac{\pi \cos \pi a}{a \sin \pi a}.$$

II.47. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^\pi \ln \sin \theta \, d\theta.$$

R. Această integrală poate fi calculată prin diverse procedee elementare. Pentru calcularea ei în planul complex vom considera funcţia

$$f(z) = \frac{\ln z}{1-z}.$$

Această funcţie are un pol simplu $z = 1$ iar $z = 0$ punct critic. Ea este olomorfă în vecinătatea lui $z = 1$ şi este uniformă în domeniul D simplu conex care nu conţine punctul $z = 0$. Considerăm domeniul D din fig. II.47,*a* limitat de curba Γ, constînd dintr-un arc de cerc γ cu centrul în $z = 1$ şi de rază 1 şi un cerc γ' cu centrul în 0 şi de rază ε parcurs în sens negativ. (Deoarece ε este foarte mic, γ' poate fi considerat semicerc limitat de punctele A şi B de afixe $i\varepsilon$ şi $-i\varepsilon$).

În interiorul domeniului D, $f(z)$ este uniformă şi convenim ca în punctul $z = \varepsilon$ situat pe γ', $f(z)$ să fie egală cu numărul real negativ $\frac{\ln \varepsilon}{1-\varepsilon}$. Rezultă că pe porţiunea axei reale interioară domeniul lui D, funcţia $f(z)$ este reală. În particular

$$f(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{1-x} = -\left(\frac{d}{dx} \ln x\right)_{x=1} = -1.$$

Conform teoremei lui Cauchy

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz - \int_{\gamma'} f(z)\, dz = 0.$$

Raportul

$$|zf(z)| = \frac{|z|}{|1-z|} |\ln z| \text{ tinde către zero o dată cu } |z|, \text{ deci}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma'} \frac{\ln z}{1-z}\, dz = 0.$$

Pe cercul γ, dacă θ este argumentul lui z (fig. II.47, *b*)

$$|z| = 2\cos\theta,$$

de unde $z = 2\cos\theta e^{i\theta} = e^{2i\theta} + 1$, cu $\frac{-\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

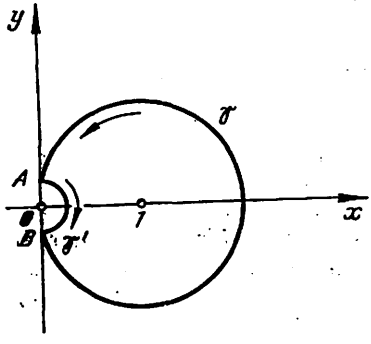


Fig. II.47, *a*

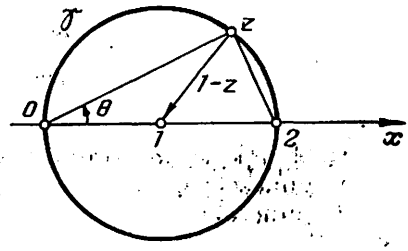


Fig. II.47, *b*

Funcţia $\ln z = \ln(2\cos\theta) + i\theta$ este reală pe axa reală ($\theta = 0$). Pe de altă parte

$$1 - z = e^{-2i\theta}$$

şi

$$\frac{dz}{1-z} = \frac{2ie^{-2i\theta}\,d\theta}{e^{-2i\theta}} = +2id\theta.$$

Deci

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma} f(z)\,dz = +2i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\ln(2\cos\theta) + i\theta]\,d\theta = 0$$

sau

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos\theta\,d\theta + \pi\ln 2 + i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta\,d\theta = 0.$$

Dar

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta\,d\theta = 0,$$

deci

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos \theta \, d\theta = -\pi \ln 2.$$

Înlocuind în ultima relație θ cu $\frac{\pi}{2} - \theta$, obținem

$$\int_{0}^{\infty} \ln \sin \theta \, d\theta = -\pi \ln 2.$$

II.48. Să se determine transformarea circulară care transformă: 1° punctele $z_1=1$, $z_2=0$, $z_3=-1$ în punctele $Z_1=i$, $Z_2=1$, $Z_3=\infty$; 2° punctele $z_1 = -i$, $z_2 = 0$, $z_3 = i$ în punctele $Z_1 = -1$, $Z_2 = i$, $Z_3 = 1$.

R. 1° Fie

$$Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

transformarea circulară căutată.

Scriind că punctului $z_1 = 1$ îi corespunde punctul $Z_1 = i$, obținem

$$\alpha + \beta = i(\gamma + \delta).$$

Scriind că punctului $z_2 = 0$ îi corespunde punctul $Z_2 = 1$, iar punctului $z_3 = -1$, îi corespunde punctul $Z_3 = \infty$, obținem

$$\beta - \delta = 0 \tag{2'}$$

și

$$\delta - \gamma = 0. \tag{2''}$$

Din (1) cu condițiile (2), (2'), (2'') obținem transformarea

$$Z = \frac{(-1 + 2i)\, z + 1}{z + 1}.$$

Înlocuind aici $z = x + iy$, $Z = X + iY$, găsim

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{2(x^2+y^2+y) - 1}{(x+1)^2 + y^2} \\ Y &= \frac{2(x^2 + y^2 - y)}{(x+1)^2 + y^2} \end{aligned}\right\}$$

De aici deducem că cercului de ecuație

$$x^2 + y^2 + y - \frac{1}{2} = 0 \tag{3}$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) dreapta de ecuație $X = 0$. Ecuația (3) se mai scrie $\left|z + \frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. În interiorul cercului (3) avem $x^2 + y^2 + y - \frac{1}{2} < 0$, deci cercului $\left|z + \frac{i}{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$ îi corespunde prin transformarea (1) semiplanul $\operatorname{Re} Z \geqslant 0$.

Cercului de ecuație

$$x^2 + y^2 - y = 0 \tag{4}$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) dreapta de ecuație $Y = 0$. Scriind ecuația (4) sub forma $\left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$, rezultă că cercului $\left|z - \frac{i}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ îi corespunde prin transformarea [1] semiplanul $\operatorname{Im} Z \leqslant 0$, iar domeniului $\left|z - \frac{i}{2}\right| > \frac{1}{2}$ îi corespunde semiplanul $\operatorname{Im} Z < 0$.

2°. Ținînd seama de faptul că o transformare omografică conservă raportul anarmonic, adică

$$\frac{Z - Z_1}{Z - Z_2} = \frac{Z_3 - Z_1}{Z_3 - Z_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}, \tag{5}$$

obținem, înlocuind în (5) datele problemei 2°, transformarea

$$Z = i\,\frac{1 - z}{1 + z}, \tag{6}$$

de unde deducem

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} \\ Y &= \frac{1 - x^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2} \end{aligned}\right\}.$$

Pe cercul $|z| \leqslant 1$, avem $Y = 0$, deci prin transformarea (6) cercului $|z| \leqslant 1$ îi c orespunde semiplanul $\operatorname{Im} Z \geqslant 0$, iar semiplanului $y \geqslant 0$ îi corespunde semiplanul $\operatorname{Re} Z \geqslant 0$.

II.49. Să se determine transformarea conformă care transformă cercul $|z| = 1$ în el însuși.

R. Fie $A(\alpha)$ un punct interior cercului care se transformă în centrul cercului (fig. II.49, deci pentru $z = \alpha$ avem $Z = 0$. Punctul $A' = \left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)$, care este inversul lui A față de cercul $|z| = 1$, se transformă în punctul de la infinit, deci pentru $z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$

avem $Z = \infty$. Transformarea va fi deci de forma

$$Z = k\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}.$$

Dacă punctul $M(z)$ este pe cerc, atunci

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}\right| = |\alpha|,$$

deoarece

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{AP}{A'P} = \frac{1-|\alpha|}{\left|\frac{1}{\bar{\alpha}}\right|-1} = |\alpha|.$$

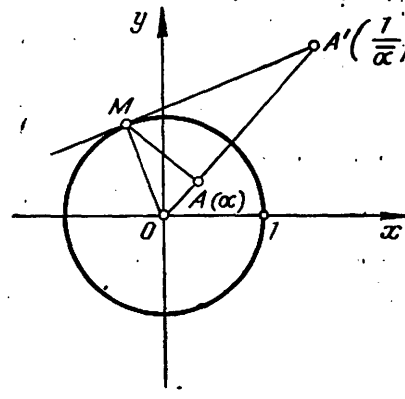


Fig. II.49

Punînd condiția ca Z, transformatul lui $M(z)$, să fie pe cercul dat, trebuie să avem

$$|Z| = |\alpha k| = 1,$$

deci

$$k\bar{\alpha} = e^{i(\varphi+\pi)} = -e^{i\varphi}(\varphi \text{ real}),$$

de unde

$$Z = e^{+i\varphi}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$

II.50. Să se studieze transformarea circulară

$$Z = \frac{i-z}{i+z} \tag{1}$$

și să se arate că transformă primul cadran (z) în semicercul superior $|Z| < 1$.

R. Pentru a determina punctele unite ale transformării (1) facem în ecuația (1) $Z = z$ și obținem ecuația

$$z^2 + (1+i)z - i = 0$$

cu soluțiile

$$z_1 = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-1)}{2}, \quad z_2 = -\frac{(1+i)(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

Deci z_1 și z_2 sînt punctele unite ale transformării (1).

Transformarea (1) are forma canonică

$$\frac{Z - \frac{(1+i)(\sqrt{3}-1)}{2}}{Z + \frac{(1+i)(\sqrt{3}+1)}{2}} = k \frac{z - \frac{(1+i)(\sqrt{3}-1)}{2}}{z + \frac{(1+i)(\sqrt{3}+1)}{2}}.$$

Înlocuind în această ecuaţie pe Z cu valoarea dată de (1), determinăm valoarea lui k şi anume $k = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, deci forma canonică a transformării (1) este

$$\frac{Z - \frac{(1+i)(\sqrt{3}-1)}{2}}{Z + \frac{(1+i)(\sqrt{3}+1)}{2}} = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{z - \frac{(1+i)(\sqrt{3}-1)}{2}}{z + \frac{(1+i)(\sqrt{3}+1)}{2}}.$$

Avem $|k| = 1$, deci transformarea (1) este eliptică.

În ecuaţia (1) înlocuind $z = x + iy$ şi $Z = X + iY$, avem

$$X + iY = \frac{1 - x^2 - y^2 + 2ix}{x^2 + (1+y)^2},$$

de unde

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (1+y)^2} \\ Y &= \frac{2x}{x^2 + (1+y)^2} \end{aligned}\right\}$$

De aici deducem că dreptei $x = 0$ îi corespunde dreapta $Y = 0$, iar cercurile de ecuaţie

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) dreapta de ecuaţie $X = 0$.

Ecuaţia (3) se mai scrie $|z| = 1$. În interiorul cercului (3) avem $x^2 + y^2 < 1$, deci cercului plin $|z| \leqslant 1$ îi corespunde prin transformarea (1) semiplanul $\operatorname{Re} Z \geqslant 0$.

Se poate arăta că această transformare transformă axa reală $y = 0$ în cercul unitate. Pentru verificare este suficient să arătăm că trei puncte particulare ale axei reale, de exemplu 0, 1, ∞, se transformă în puncte de pe cerc, în cazul nostru în 1, i, -1. Semiplanul superior este transformat în discul $|Z| < 1$, deoarece $z = i$ este transformat în $Z = 0$. Pentru un punct z din primul cadran avem $x > 0$ şi $y > 0$, deci $Y > 0$. Rezultă deci că primul cadran se transformă în semidiscul superior $|Z| < 1$.

II.51. Să se studieze transformarea

$$Z = \frac{1}{z + i}. \tag{1}$$

R. Făcînd în ecuația (1) $Z = z$, determinăm punctele unite ale transformării. Obținem astfel $z_1 = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3} + i}{2}$.

Notînd $Z = X + iY$, $z = x + iy$, din (1) deducem

$$X = \frac{x}{x^2 + (1 + y)^2}, \quad Y = -\frac{1 + y}{x^2 + (1 + y)^2}. \tag{2}$$

Din aceste ecuații rezultă că axei imaginare din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa imaginară, iar dreptei $y = -1$ din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa reală.

Să considerăm cercul de ecuație

$$X^2 + Y^2 + Y \leqslant 0. \tag{3}$$

Înlocuind aici pe X și Y din (2), obținem

$$-y[(1 + y)^2 + x^2] \leqslant 0.$$

Deci funcția (1) transformă semiplanul $y \geqslant 0$ în cercul de ecuație (3).

Dreptei de ecuație $x - y + 1 = 0$ din planul (z) îi corespunde în planul (Z) prima bisectoare iar dreptei $x - y - 1 = 0$ îi corespunde în planul (Z) bisectoarea a doua.

II.52. Să se studieze transformarea circulară

$$Z = \frac{(i - 3)z - 2i}{2z - 1 + 3i}. \tag{1}$$

R. Pentru a determina punctele unite ale transformării să facem în (1), $Z = z$ și obținem ecuația

$$z^2 + (1 + i)z + i = 0,$$

care are rădăcinile -1 și $-i$.

Deci, punctele unite ale transformării (1) sînt $z_1 = -1$, $z_2 = -i$.

Forma canonică a transformării este

$$\frac{Z + 1}{Z + i} = k\frac{z + 1}{z + i}.$$

Înlocuind aici pe Z cu valoarea dată de (1), obținem $k = \frac{1}{3}$, deci transformarea este hiperbolică. Forma canonică a transformării (1) este

$$\frac{Z + 1}{Z + i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{z + 1}{z + i}.$$

Înlocuind în (1) pe $Z = Y + iY$ și $z = x + iy$, obținem

$$\left.\begin{aligned} X &= -3\frac{2(x^2 + y^2) - 5x + 4y + 2}{(2x - 1)^2 + (2y + 3)^2} \\ Y &= 2\frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y - 1}{(2x - 1)^2 + 2y + 3)^2} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Din prima ecuaţie (2) rezultă că cercului de ecuaţie

$$2(x^2 + y^2) - 5x + 4y + 2 = 0$$

din planul (z) îi corespunde axa imaginară din planul (Z). Ecuaţia acestui cerc se poate scrie $\left|z - \frac{5}{4} + i\right| = \frac{5}{4}$. În interiorul acestui cerc avem $2(x^2 + y^2) - 5x + 4y + 2 < 0$, deci domeniului $\left|z - \frac{5}{4} + i\right| \leqslant \frac{5}{4}$ din planul (z) îi corespunde semiplanul $\operatorname{Re} Z \geqslant 0$ din planul (Z).

Din a doua ecuaţie (2) rezultă că cercului de ecuaţie

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa reală. Ecuaţia acestui cerc se mai scrie $\left|z - 1 + \frac{3}{2}i\right| = \frac{\sqrt{17}}{2}$, deci domeniului $\left|z - 1 + \frac{3}{2}i\right| \leqslant \frac{\sqrt{17}}{2}$ din planul (z) îi corespunde în planul (Z) semiplanul $\operatorname{Im} Z \leqslant 0$.

Inversînd ecuaţia (1), obţinem transformarea

$$z = \frac{(1 - 3i)Z - 2i}{2Z + 3 - i},$$

de unde rezultă că transformarea inversă transformării (2) este

$$\left.\begin{aligned} x &= -2\frac{X^2 + Y^2 + 3X + 6Y - 1}{(2X + 3)^2 + (2Y - 1)^2} \\ y &= 2\frac{3(X^2 + Y^2) + 2X - 3Y - 3}{(2X + 3)^2 + (2Y - 1)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Din prima ecuaţie (2') rezultă că cercului de ecuaţie

$$X^2 + Y^2 + 3X + 6Y - 1 = 0$$

din planul (Z) îi corespunde în planul (z) axa imaginară. Scriem ecuaţia acestui cerc sub forma $\left|Z + \frac{3}{2} + 3i\right| = \frac{7}{2}$, deci domeniului $\left|Z + \frac{3}{2} + 3i\right| \leqslant \frac{7}{2}$ din planul (Z) îi corespunde în planul (z) semiplanul $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

Din a doua ecuaţie (2') deducem că cercului de ecuaţie

$$3(X^2 + Y^2) + 2X - 3Y - 3 = 0$$

din planul (Z) îi corespunde axa reală din planul (z). Scriind ecuaţia acestui cerc sub forma $\left|Z + \frac{1}{3} - \frac{i}{2}\right| = \frac{7}{6}$, deducem că domeniului $\left|Z + \frac{1}{3} - \frac{i}{2}\right| \leqslant \frac{7}{6}$ din planul (Z) îi corespunde în planul (z) semiplanul $\operatorname{Im} z \leqslant 0$.

II.53. Să se studieze transformarea

$$Z = \cos z.$$

R. Deci vom studia transformarea $Z = \cos z$ a cărei derivată se anulează pentru toţi z multiplii întregi de π. Scriem

$$Z = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

Această transformare este deci compusă din două transformări

$$w = e^{iz} \text{ şi } Z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right).$$

Vom studia transformarea reciprocă: dacă se dă Z arbitrar, îi corespund două valori ale lui W, rădăcini ale ecuaţiei

$$w^2 - 2Zw + 1 = 0.$$

Rădăcinile sînt distincte dacă $Z \neq \pm 1$; fiecărei din aceste rădăcini îi corespund o infinitate de valori ale lui z, deduse una din alta prin adăugarea unui multiplu întreg arbitrar de 2π. Punînd $z = x + iy$, $Z = X + iY$, avem

$$X = \operatorname{ch} y \cos x, \quad Y = -\operatorname{sh} y \sin x.$$

Dacă fixăm y, punctul (X, Y), cînd x variază, descrie elipsa

$$\frac{X^2}{\operatorname{ch}^2 y} + \frac{Y^2}{\operatorname{sh}^2 y} = 1$$

(descrisă o dată dacă x variază într-un interval de lungime 2π).

Dacă fixăm x, punctul (X, Y), cînd y variază, descrie o dată una din cele două ramuri ale hiperbolei

$$\frac{X^2}{\cos^2 x} - \frac{Y^2}{\sin^2 x} = 1.$$

Pentru a studia variaţia lui Z în funcţie de z, este suficient, din cauza periodicităţii, să facem ca x să varieze între $-\pi$, π şi y de la $-\infty$ la $+\infty$. Dacă schimbăm pe z cu $-z$, Z nu se schimbă, deci vom face ca x să varieze de la 0 la π. Dacă schimbăm y cu $-y$ fără a schimba x, X nu se schimbă iar Y devine $-Y$; deci la două puncte z_1 şi z_2 simetrice în raport cu axa reală le corespund două puncte Z_1 şi Z_2 simetrice în raport cu axa reală. Astfel este suficient să facem ca x să ia valori între 0 şi y între 0 şi π iar y între 0 şi $+\infty$, fie deci domeniul

$$(D): 0 < x < \pi, \; y > 0.$$

Dacă $x = 0$ şi y descreşte de la $+\infty$ la 0, Z rămîne pe axa reală şi descreşte de la $+\infty$ la $+1$.

Dacă $y = 0$ şi x creşte de la 0 la π, Z rămîne pe axa reală şi descreşte de la $+1$ la -1.

Dacă $x = \pi$ şi y creşte de la 0 la $+\infty$, Z rămîne pe axa reală şi descreşte de la -1 la $-\infty$.

Dacă punctul z descrie un segment $y = y_0 (> 0)$, x crescînd de la 0 la π, punctul Z descrie o singură dată o semielipsă de focare ± 1, situată în semiplanul $\operatorname{Im} Z < 0$, avînd drept axă mare $\operatorname{ch} y_0$ iar ca axă mică $\operatorname{sh} y_0$.

Dacă punctul z descrie o semidreaptă $x = x_0$ cu $0 < x_0 < \pi$, cu y crescînd de la 0 la $+\infty$, iar Z descrie o singură dată un semibraţ al hiperbolei de focare ± 1 situat în semiplanul $\operatorname{Im} Z < 0$, de axe $|\cos x_0|$ şi $\sin x_0$.

Banda $0 < x < \pi$, $(-\infty < y < +\infty)$ (fig. II.53, *a*) se transformă, în planul (Z) cu tăieturile $(-\infty, -1]$ şi $[1, +\infty)$ situate pe axa reală (fig. II.53, *b*).

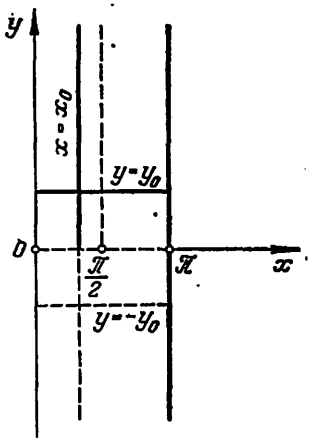


Fig. II.53, *a*,

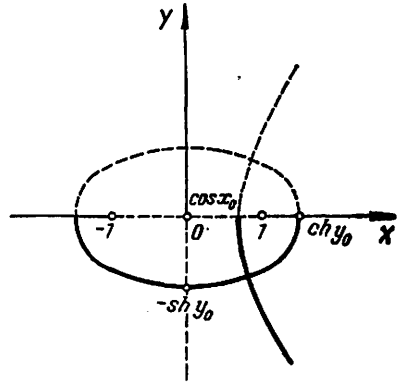


Fig. II.53, *b*,

În ceea ce priveşte unghiurile, se observă că transformarea $Z = \cos z$ în interiorul lui D păstrează unghiurile; ea transformă paralelele la axele de coordonate din planul (z) în elipse şi hiperbole omofocale.

II.54. Să se studieze transformarea conformă

$$Z = k \ln \frac{z - a}{z + a}.$$

R. Transformarea se mai scrie

$$\frac{z - a}{z + a} = e^{X/k} e^{Y/k}.$$

Egalînd modulele şi argumentele, obţinem

$$\left(x + a \coth \frac{X}{k}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 X/k}, \qquad (C_1)$$

$$x^2 + \left(y - a \operatorname{cotg} \frac{Y}{k}\right)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 Y/k}, \qquad (C_2)$$

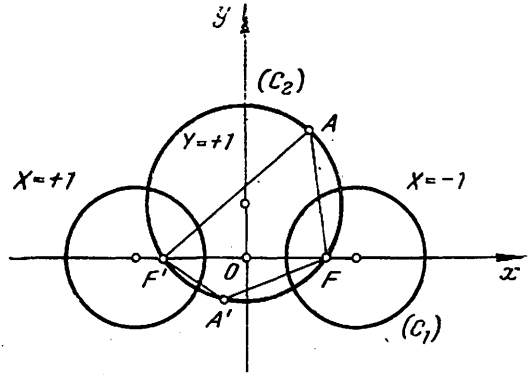


Fig. II.54

ecuaţii care reprezintă două familii de cercuri ortogonale (fig. II.54). Pentru un acelaşi cerc (C_2), valorile parametrului $\frac{Y}{k}$ diferă cu π dacă se trece de la arcul superior AMA' la arcul inferior $A'M'A$, deci ecuaţia segmentului AA' este $Y = \pi$, iar ecuaţia axei absciselor din care s-a scos acest segment este $Y = 0$ şi $\frac{Y}{k} = \pi - \measuredangle AM'A'$ pentru arcul inferior al cercului (C_1) şi $\frac{X}{k} = \ln \frac{MA}{MA'}$.

Cercurile (C_2) situate la dreapta corespund valorilor negative ale lui X şi reciproc.

Dacă se consideră X ca funcţie potenţială, ecuaţiile de mai sus ne dau liniile de forţă şi liniile de nivel ale cîmpului creat de două suprafeţe electrizate, în formă de cilindri drepţi cu bazele circulare, cu axe paralele, la distanţa $2d$. Presupunînd razele egale cu R, se poate determina capacitatea C pe unitatea de lungime a condensatorului format de aceste două suprafeţe.

Dacă se consideră X potenţialul cilindrului din stînga, $-X$ va fi potenţialul cilindrului din dreapta şi $2X$ diferenţa de potenţial; avem

$$a \coth \frac{X}{k} = d, \quad \frac{a}{\operatorname{sh} \frac{X}{k}} = R,$$

unde

$$X = k \arg \operatorname{ch} \frac{d}{R}.$$

Dacă în jurul cilindrului are loc o rotaţie, Y variază cu $2k\pi$. Deci sarcina unitară este $q = 2k\pi\varepsilon$ şi

$$C \frac{q}{2X} = \frac{\pi\varepsilon}{\arg \operatorname{ch} \frac{d}{R}} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{d}{R} + \sqrt{\frac{d^2}{R^2} - 1}\right)}.$$

În cazul în care cilindrii conductori se reduc la fire rectilinii de diametru neglijabil, formulele precedente dau cîmpul electric creat de două fire paralele, la distanţa $2a$ sau de un fir paralel cu un plan conductor infinit ($X = 0$), între care este distanţa a.

II.55. Să se determine funcţia care transformă conform planul (z) din care s-a scos segmentul care uneşte punctele $z_1 = 1 + i$ şi $z_2 = -3 - i$ în semiplanul superior.

R. Vom considera funcţia

$$u = \alpha \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

care transformă punctele z_1 şi z_2 în punctele $u = 0$ şi $u = \infty$. Punînd condiţia ca punctului $\frac{z_1 + z_2}{2}$ să-i corespundă punctul $u = 1$, segmentul z_1z_2 se va transforma în semiaxa reală pozitivă. Avem

$$1 = \alpha \frac{\frac{z_1 + z_2}{2} - z_1}{\frac{z_1 + z_2}{2} - z_2},$$

de unde $\alpha = -\frac{3}{5}$, deci, funcţia

$$u = \frac{3}{5} \frac{-z + 1 + i}{z + 3 + i} \tag{1}$$

transformă planul (z) din care s-a scos segmentul z_1z_2 în planul (u) din care am scos semiaxa reală pozitivă.

Considerăm acum funcţia

$$Z = \sqrt{u}, \tag{2}$$

unde pentru radical se ia determinarea pozitivă.

În planul (u) din care s-a scos semiaxa reală pozitivă această funcţie este uniformă. Cu notaţia $u = \rho e^{i\theta}$ avem $Z = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$, sau dacă notăm $\rho_1 = \rho^{1/2}$, $\theta_1 = \frac{\theta}{2}$,

$$Z = \rho_1 e^{i\theta_1}.$$

Dacă $0 < \theta < 2\pi$, avem $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \pi$, deci unui punct din planul (u) din care s-a scos semiaxa reală pozitivă îi corespunde un punct din semiplanul superior al planului (Z).

Din (1) şi (2) rezultă

$$Z = \sqrt{\frac{3}{5}\,\frac{-z+1+i}{z+3+i}},$$

unde pentru radical se consideră determinarea pozitivă. Această funcţie realizează transformarea cerută.

II.56. Să se determine funcţia care transformă domeniul $|z-a| > a$, $|z-b| < b$, $y > 0$ cu $0 < a < b$ în semiplanul superior.

R. Funcţia

$$u = \frac{z-2a}{z} \tag{1}$$

transformă punctul $z = 0$ în $u = \infty$, iar $z = 2a$ în $u = 0$. Avem

$$u_1 = \frac{x^2+y^2-2ax}{x^2+y^2}; \qquad u_2 = \frac{2ay}{x^2+y^2}, \qquad (u = u_1 + iu_2).$$

Pentru orice punct din domeniul dat (fig. II.56, *a*) avem $u_1 > 0$ şi $u_2 > 0$, deci prin această funcţie domeniul dat se transformă în semibanda de lăţime $\frac{b-a}{b}$ situată în primul cadran (fig. II.56, *b*).

Funcţia

$$v = \frac{\pi b}{b-a}\,u \tag{2}$$

transformă semibanda din fig. II.56, *b* în semibanda de lăţime π din primul cadran (fig. II.56, *c*), iar funcţia

$$w = v - \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

transformă semibanda din fig. II.56, *c* în semibanda din semiplanul superior de lăţime π cu $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, fig. II.56, *d*.

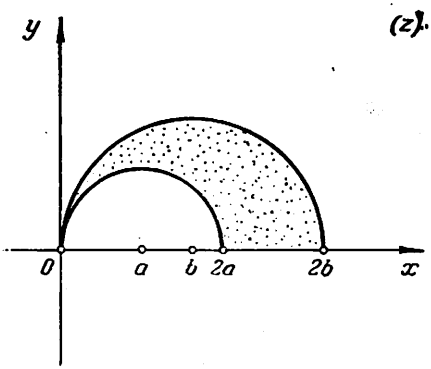


Fig. II.56, *a*

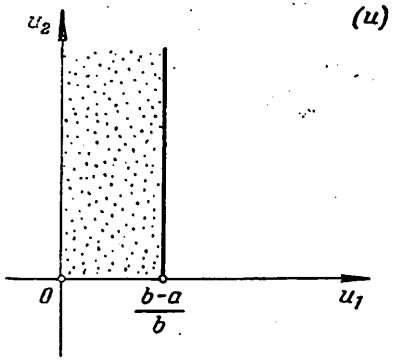


Fig. II.56, *b*

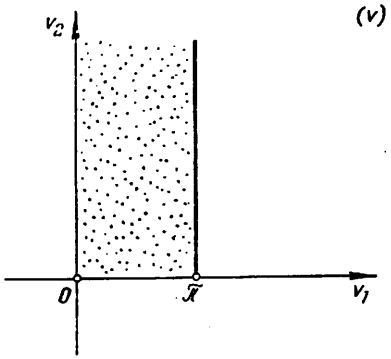


Fig. II.56, *c*

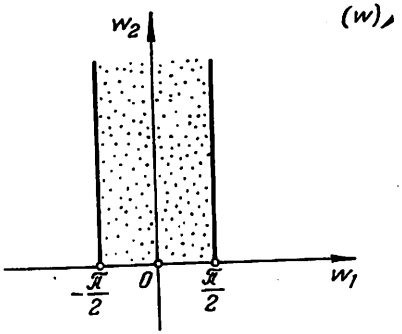


Fig. II.56, *d*

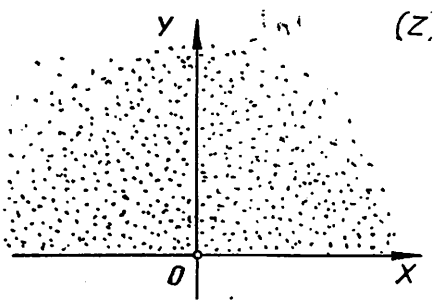


Fig. II.56, *e*

Pentru a transforma domeniul din fig. II.56, *d* în semiplanul $\operatorname{Im} Z > 0$, (fig. II.57, e) vom considera problema inversă. Să determinăm funcţia care reprezintă conform domeniul $\operatorname{Im} Z > 0$ pe domeniul $w_2 > 0$, $-\frac{\pi}{2} < w_1 < \frac{\pi}{2}$ din planul variabilei (w) cu condiţia ca punctele de la infinit din cele două plane să se corespundă iar punctelor $Z = \pm 1$ să le corespundă punctele $w = \pm \frac{\pi}{2}$. Vom utiliza formula lui Schwartz-Christoffel cu $Z_1 = -1$, $Z_2 = 1$, $Z_3 = \infty$ şi $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$. Avem

$$w = C \int_{Z_0}^{Z} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = -iC \int_{Z_0}^{Z} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

de unde

$$w = -iC \arcsin Z + iC \arcsin Z_0$$

sau

$$w = C_1 \arcsin Z + C_2.$$

Vom considera ramura funcţiei $\arcsin Z_0$ care ia valori reale cuprinse în intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cînd $Z = X \in [-1, 1]$.

Determinăm constantele C_1 şi C_2 folosind corespondenţa dată, deci

$$-\frac{\pi}{2} = C_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C_2, \quad \frac{\pi}{2} = C_1\frac{\pi}{2} + C_2,$$

de unde $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Rezultă funcţia

$$w = \arcsin Z.$$

Funcţia care transformă semibanda $\operatorname{Im} w > 0$, $-\frac{\pi}{2} < w_1 < \frac{\pi}{2}$ în semiplanul superior va fi deci

$$Z = \sin w. \tag{4}$$

Ţinînd seama de funcţiile (1), (2), (3) şi (4), rezultă funcţia cerută în problemă

$$Z = -\cos \frac{\pi b(z-2a)}{z(b-a)}.$$

II.57. Să considerăm în planul complex (z) un sector circular S situat în interiorul cercului unitate, a cărui frontieră este definită în coordonate polare prin

$$\theta = 0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

$$r = 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3},$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1.$$

Considerăm în interiorul lui S un patrulater curbiliniu Q ale cărui laturi sînt definite prin

$$\begin{aligned} &r_1 \leqslant r \leqslant r_2, && \theta = \theta_1, \\ &r_1 \leqslant r \leqslant r_2, && \theta = \theta_2, \\ &r = r_1, && \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2, \\ &r = r_2, && \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2, \end{aligned}$$

cu

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{3}, \qquad 0 < r_1 < r_2 < 1.$$

Să se determine figura transformată a lui Q (fig. II.57, a) prin transformările :

$$1^\circ\ u = z^6;\ 2^\circ\ Z = \frac{1-u}{1+u} = \frac{1-z^6}{1+z^6};\ 3^\circ\ v = z^3;$$

$$4^\circ\ w = \frac{1-v}{1+v} = \frac{1-z^3}{1+z^3};\ 5^\circ\ Z = iw^2 = i\left(\frac{1-z^3}{1+z^3}\right)^2.$$

R. 1° Transformarea $u = z^6$ transformă Q în patrulaterul analog Q' definit prin

$$\rho_1 \leqslant r \leqslant \rho_2,\ \theta = \varphi_1 \text{ și } \theta = \varphi_2,$$

$$\varphi_1 \leqslant \theta \leqslant \varphi_2,\ r = \rho_1 \text{ și } r = \rho_2.$$

cu

$$\rho_1 = r_1^6,\ \rho_2 = r_2^6,\ \varphi_1 = 6\theta_1,\ \varphi_2 = 6\theta_2,$$

unde ρ_1 este mic iar ρ_2 este apropiat de 1, φ_1 este mic iar φ_2 este apropiat de 2π (fig. II.57, *b*).

2° Transformarea $Z = \dfrac{1 - z^6}{1 + z^6}$ este produsul transformărilor

$$u = z^6 \text{ și } Z = \frac{1 - u}{1 + u}.$$

Ultima este o transformare omografică. Avem

$$Z = \frac{(1 - u)(1 + \bar{u})}{|1 + u|^2} = \frac{1 - |u|^2}{|1 + u|^2} + \frac{\bar{u} - u}{|1 + u|^2}.$$

Dacă $|u| \leqslant 1$, $\operatorname{Re} Z > 0$. Dacă $|u| > 1$, $\operatorname{Re} Z < 0$.

Interiorul cercului unitate este transformat în semiplanul $\operatorname{Re} Z > 0$.

Dacă u descrie axa reală, Z descrie axa reală.

Dacă u descrie cercul γ de centru 0 și raza r, Z descrie un cerc Γ ortogonal axei reale, trecînd prin punctele

$$Z = \frac{1 - r}{1 + r},\quad (u = r) \text{ și } Z = \frac{1 + r}{1 - r},\quad (u = -r).$$

Dacă u descrie o semidreaptă, trecînd prin origine, Z descrie un arc de cerc ortogonal cu cercul Γ trecînd prin punctele

$$Z = 1,\ (u = 0),\ Z = -1,\ (u = \infty).$$

În fig. II.57, *c* avem imaginea Q'' a lui Q'.

Pentru a determina imaginea frontierei sectorului circular S, observăm că $z = 0$ pentru $Z = 1$.

Cercul $|z| = 1$ se transformă în axa imaginară.

Dreptele $\theta = 0$ și $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ au imaginile pe axa reală.

Imaginea lui S este deci semiplanul (fig. II.57, *d*).

$$\operatorname{Re} Z > 0 \text{ cu tăietura } (0, 1).$$

3° Transformarea $v = z^3$ transformă domeniul Q în Q_1 reprezentat în fig. II.57, *e*.

4° Transformarea

$$w = \frac{1 - v}{1 + v} = \frac{1 - z^3}{1 + z^3}$$

a fost studiată la 2°; ea transformă Q_1 în patrulaterul Q_2, situat într-un sfert de plan, atunci Q'' este situat în semiplanul din dreapta.

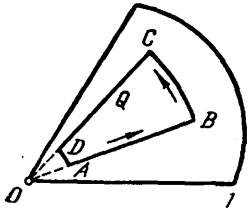


Fig. II.57, *a*

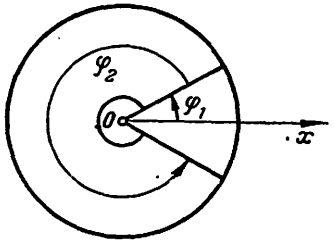


Fig. II.57, *b*

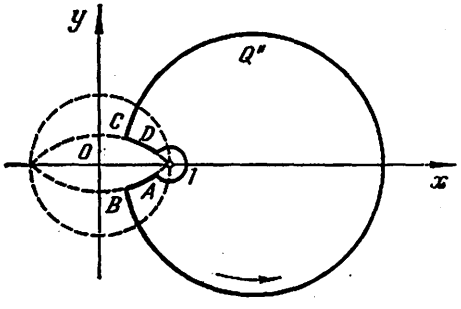


Fig. II.57, *c*

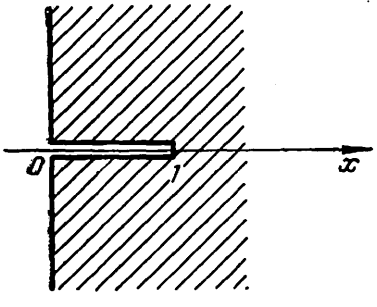


Fig. II.57, *d*

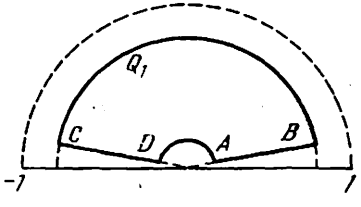


Fig. II.57, *e*

5° Fie transformarea

$$Z = iw^2 = i\left(\frac{1 - z^3}{1 + z^3}\right)^2.$$

Dacă argumentul lui w este cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ și 0, cel al lui w^2 este cuprins între $-\pi$ și 0 iar cel al lui Z între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$. Transformarea $Z = iw^2$ transformă sfertul de plan ocupat de Q_2 în semiplanul Re $(z) > 0$.

Prin transformarea

$$Z = i\left(\frac{1 - z^3}{1 + z^3}\right)^2$$

se trece deci la sectorul inițial S din semiplanul Re $(z) > 0$.

Frontiera lui S se transformă astfel:

$$z = 0 \text{ în } Z = i,$$

$|z| = 1$ în partea negativă a axei imaginare.

segmentul (0, 1) al axei reale în segmentul (0, 1) al axei imaginare;

segmentul (0, 1) al dreptei $Q = \frac{\pi}{3}$ în segmentul (0, 1) al axei imaginare.

II.58. Să se reprezinte domeniul din fig. II.58 *a* pe semiplanul superior.

R. Vîrfurile A_1 și A_2 se găsesc la infinit. Unghiul din A_2 se obține luînd unghiul pe care-l fac între ele dreptele A_1A_2 și A_2A_3 cu semnul minus, deci $\alpha_2 = -\alpha$. Pentru unghiul din A_1 avem $\alpha_1 = -(1 - \alpha)$ iar pentru unghiul din A_3 avem evident $\alpha_3 = 2$. Condiția geometrică $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 - 2 = 1$ este verificată.

Luînd în planul (z) punctele $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$, $z_3 = -1$ de pe axa reală (fig. II.58, *b*) corespunzătoare vîrfurilor A_1, A_2, A_3 ale poligonului și ținînd seama de valorile unghiurilor și de faptul că pentru $z = -1$ va trebui să avem $Z = ih$, rezultă $z_0 = -1$ iar formula lui Schwartz-Christoffel devine

$$Z = C\int_{-1}^{z} z^{\alpha-2}(1 + z)\,dz + ih \tag{1}$$

unde C este o constantă care urmează a fi determinată.

C nu depinde de α și β, deci o vom determina pentru $\alpha = \beta = 0$:

$$Z = C\int_{-1}^{z} \frac{z + 1}{z^2}\,dz + ih = C\left(\ln z - i\pi - \frac{1}{z} + 1\right) + ih.$$

Dacă z descrie semiaxa reală pozitivă, Z descrie toată axa reală. Deci pentru $z > 0$ real, Z este real. Cu notația $C = C_1 + iC_2$ avem

$$(C_1 + iC_2)\left(\ln \rho - i\pi - \frac{1}{x} + 1\right) + ih = \text{real},$$

deci

$$iC_2\left(\ln \rho - \frac{1}{x} + 1\right) - i\pi C_1 + ih \equiv 0,$$

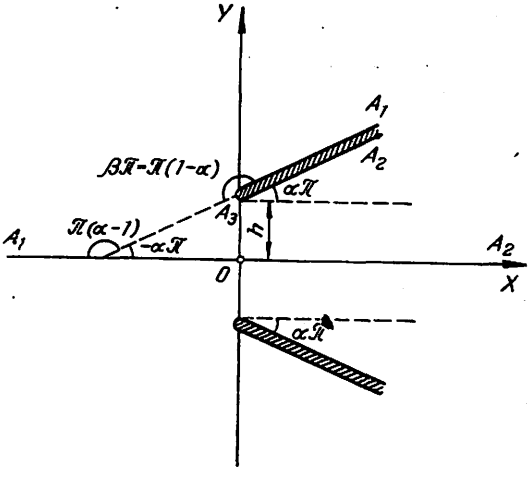


Fig. II.58, *a*

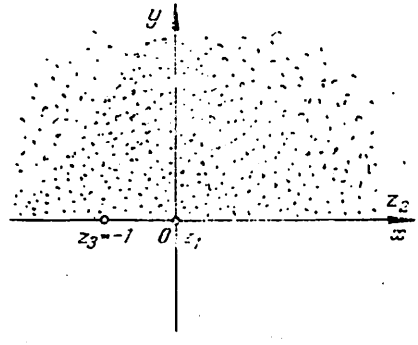


Fig. II.58, *b*

Pentru $\rho>0$ găsim $C_2 = 0$, $C_1 = \dfrac{h}{\pi}$. Cu acesta (1) devine

$$z = \frac{h}{\pi}\int_{-1}^{z} z^{\alpha-2}(1+z)\,dz + ih = \frac{h}{\pi}z^{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{z(\alpha-1)}\right] - \frac{h}{\pi}\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right] + ih = \frac{h}{\pi}z^{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{z(\alpha-1)}\right] + \frac{h}{\pi}\,\frac{e^{i\pi\alpha}}{\alpha(\alpha-1)} + ih.$$

Funcția obținută este olomorfă în domeniul care conține segmentul de pe axa reală, pe care este reală. În puncte simetrice față de axa reală situate în domeniul de olomorfie, funcția ia valori complex conjugate.

II.59. Să se reprezinte pe semiplanul superior domeniul din fig. II.59.

R. În acest caz unghiul din A_1 se obține luînd unghiul pe care-l fac între ele dreptele A_1A_5 și A_1A_2, deci $\alpha_1 = 0$. Analog se găsesc $\alpha_3 = \alpha_5 = 0$ și $\alpha_2 = \alpha_4 = \frac{3}{2}$.

Deoarece trei parametri pot fi luați în mod arbitrar, aceasta fiind în concordanță cu faptul că reprezentarea conformă este complet determinată dacă se dă corespondența a trei puncte de pe contururi, alegem $z_1 = -a$, $z_2 = -1$, $z_3 = -b$, $z_4 = 0$, $z_5 = \infty$.

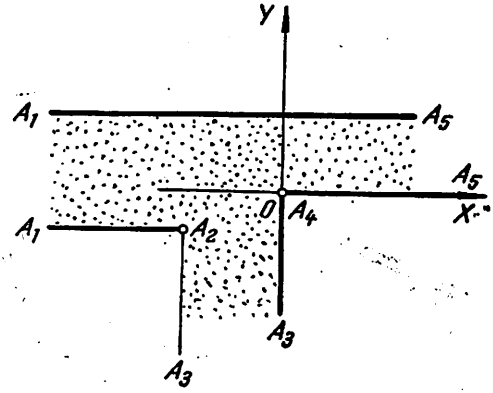


Fig. II.59

Formula lui Schwartz-Christoffel devine

$$Z = C\int_0^z (z+a)^{-1}(z+1)^{\frac{1}{2}}(z+b)^{-1}z^{\frac{1}{2}}\,dz \tag{1}$$

cu a, b, C constante nedeterminate.

Pentru determinarea lui C vom integra pe un semicerc γ_R cu centrul în $z = 0$ de rază infinită. Alegînd pe (z_4, z_5) determinarea aritmetică a radicalului, avem

$$\frac{\sqrt{z(z+1)}}{(z+a)(z+b)} = \frac{1}{z} + \frac{ab-(a+b)}{4}\frac{1}{z^2} + \dots$$

iar conform cu teorema reziduurilor

$$C\int_{\gamma_R} \frac{\sqrt{z(1+z)}}{(z+a)(z+b)}\,dz = -\pi i C + 0\left(\frac{1}{R}\right),$$

unde $0\left(\frac{1}{R}\right) \to 0$ cînd $R \to \infty$.

Dar ocolind $z = 0$ pe semicercul γ_R în sens direct, îi corespunde în planul (Z) trecerea de pe dreapta A_1A_5 pe dreapta A_4A_5, adică o variație aproximativ egală cu $-ih_3$, deci la limită pentru $R \to \infty$

$$-i\pi C = -ih_3,\ C = \frac{h_3}{\pi}. \tag{2}$$

Pentru determinarea lui a şi b se integrează pe cercuri cu centrele în punctele $-a$ şi $-b$ de raze suficient de mici ţinînd seama de determinarea radicalului $-\sqrt{x(x+1)}$. Avem

$$C \int\limits_{|z+a|<r} \frac{-\sqrt{z(z+1)}}{(z+a)(z+b)} dz = -\frac{2\pi C\sqrt{-a(1-a)}}{b-a} + o(r) \text{ cu } o(r) \to 0, r \to 0.$$

Ocolind punctul $z = -a$, se trece de la o latură la alta şi creşterea lui Z este aproximativ $-ih_1$, deci la limită, pentru $r \to 0$, avem

$$h_1 = \frac{h_3\sqrt{a(1-a)}}{b-a}. \tag{3}$$

Procedind în mod analog pentru punctul $z = -b$ şi ţinînd seama că pe (z_2, z_4) avem $i\sqrt{x(x+1)}$, obţinem

$$-i\pi C \frac{i\sqrt{b(1-b)}}{a-b} = h_2$$

cu

$$h_2 = h_3 \frac{\sqrt{b(1-b)}}{a-b}. \tag{4}$$

Relaţiile (2), (3), (4) ne dau constantele a, b, c, deci funcţia (1) este complet determinată.

II.60. Să se studieze cu ajutorul trasformărilor conforme cîmpul creat de lentila electronică din fig. II.60, *a*.

R. Din motive de simetrie, linia (planul) mediană este o linie echipotenţială $V = 0$. deci problema se va studia pentru jumătate din lentilă.

Vom transforma domeniul dat pe semiplanul superior cu ajutorul transformării Schwartz-Christoffel. Avem

$$\alpha_1\pi = -\frac{\pi}{2}, \ \alpha_2\pi = 2\pi, \ \alpha_3\pi = 0, \ \alpha_4\pi = 2\pi, \ \alpha_5\pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Luînd în planul (z) punctele $a_1 = \infty$, $a_2 = -\lambda$, $a_3 = -\mu$, $a_4 = -1$, $a_5 = 0$ de pe axa reală (fig. II.60, *b*) corespunzătoare vîrfurilor A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ale poligonului din fig. II.60 *a* şi ţinînd seama de valorile unghiurilor de mai sus, formula lui Schwartz-Christoffel devine

$$Z = C\int \frac{z+\lambda}{z+\mu} \cdot \frac{z+1}{z^{3/2}} dz + C'.$$

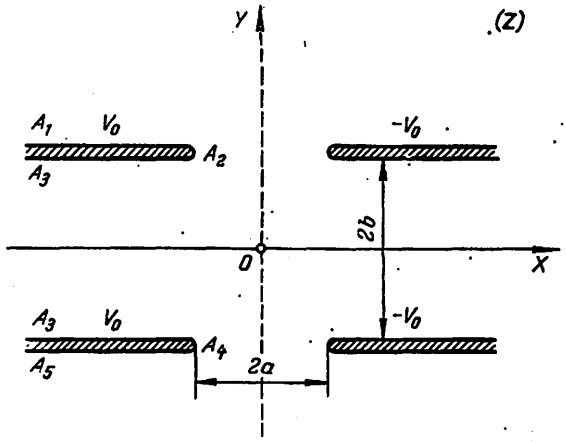


Fig. II.60, *a*

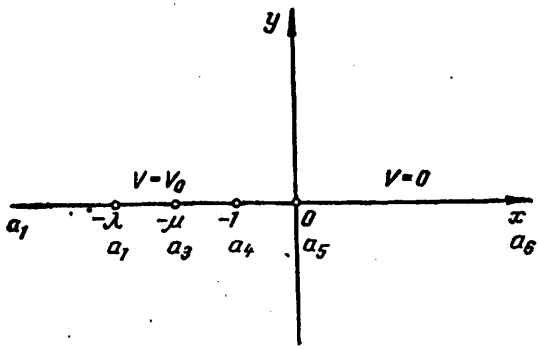


Fig. II.60, *b*

Cu transformarea $z = t^2$ integrala devine

$$I = \int \frac{z+\lambda}{z+\mu} \cdot \frac{z+1}{z^{3/2}}\, dz = 2\int \frac{t^2+\lambda}{t^2+\mu} \cdot \frac{t^2+1}{t^2}\, dt = 2\left[t - \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu-1}{\mu^{3/2}} (\lambda-\mu) \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\mu}}\right],$$

de unde rezultă

$$Z = 2C\left(\sqrt{z} - \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{\mu-1}{\mu^{3/2}} \cdot \frac{\lambda-\mu}{2i} \ln \frac{\sqrt{\mu}+i\sqrt{3}}{\sqrt{\mu}-i\sqrt{3}}\right) + C'. \qquad (2)$$

Pentru determinarea constantelor C, C', λ şi μ să ţinem seama că vîrfurile poligonului A_1, A_3 şi A_5 sînt la infinit iar A_2 în $-a+ib$ şi A_4 în $-a-ib$. Din

$$-2ib = \lim_{x\to\infty} \int_{-x+ib}^{-x-ib} dz = \lim_{\rho=0} C \int_{\pi}^{0} \frac{\rho e^{i\theta} - \mu + \lambda}{\rho e^{i\theta}} \cdot \frac{\rho e^{i\theta} - \mu + 1}{(\rho e^{i\theta} - \mu)^{3/2}} i\rho e^{i\theta} d\theta =$$

$$= \frac{-C(\lambda - \mu)(1-\mu)i\pi}{i\mu^{3/2}}$$

rezultă o primă condiţie :

$$2ib = C(l - \mu)(\mu - 1)\frac{\pi}{\mu^{3/2}}. \tag{3}$$

Pentru $z > 0$ $[V = V_0)$ corespunde în Z, $X = 0$. Făcînd în (1) pe z real şi pozitiv, rezultă că C şi C' sînt de forma

$$C = iK, \quad C' = iK'.$$

Din corespondenţa punctelor A_3 şi a_3 rezultă din (2) ţinînd seama de (4) că

$$-a + ib + 2Ki\left(i\sqrt{\lambda} - \frac{\lambda}{i\mu\sqrt{\lambda}} + \frac{\mu - 1}{\mu^{3/2}} \cdot \frac{\lambda - \mu}{2i} \frac{\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\mu} + \sqrt{\lambda}}\right) + iK',$$

de unde avem

$$a = 2K\left[\sqrt{\lambda} + \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} + \frac{(\mu - 1)(\lambda - \mu)}{2\mu^{3/2}} \ln\frac{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}}\right]. \tag{5}$$

Din corespondenţa punctelor A_4 cu a_4 avem

$$-a - ib = 2Ki\left(i\sqrt{\lambda} - \frac{1}{i\mu} + \frac{\mu - 1}{\mu^{3/2}} \cdot \frac{1 - \mu}{2i} \ln\frac{\sqrt{\mu} - 1}{\sqrt{\mu} + 1}\right) + iK',$$

de unde

$$K' = -b, \text{ deci } C' = -ib \tag{6}$$

şi

$$a = 2K\left[1 + \frac{1}{\mu} + \frac{(\mu - 1)^2}{2\mu^{3/2}} \ln\frac{\sqrt{\mu} - 1}{\sqrt{\mu} + 1}\right]. \tag{7}$$

Ţinînd seama că $\lambda > \mu > 1$, $K > 0$ şi că aceste condiţii sînt verificate de (3), (5), (6) şi (7), cele trei constante sînt determinate prin aceste condiţii.

II.61. Să se determine valorile finale ale funcţiei $u = \operatorname{arctg}\sqrt{1 - z}$ cînd z descrie segmentul de dreaptă care uneşte punctele $z = 0$ cu $z = 1 + i$, (fig. II.61, *a*) valoarea iniţială a lui u fiind $\frac{\pi}{4}$.

R. Punem

$$V = \sqrt{1 - z}.$$

Fie $z = 0$; alegem $v = +1$. Cînd z descrie segmentul $(0, 1 + i)$, argumentul lui $1 - z$ variază de la 0 (valoare obligatorie pentru $2k\pi$), la $-\frac{\pi}{2}$, iar al lui v de la 0 la $-\frac{\pi}{4}$. Punctul v descrie un arc de hiperbolă

$$x^2 - 2xy - y^2 = 1,$$

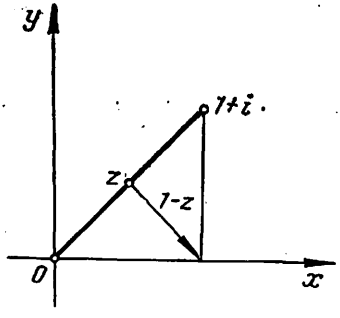


Fig. II.61, *a*

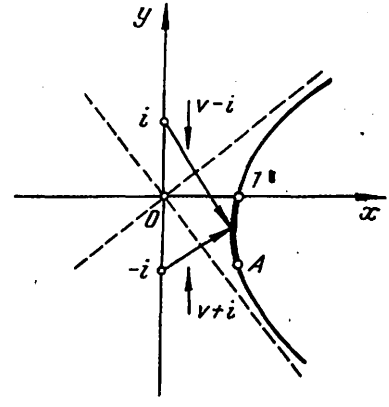


Fig. II.61, *b*

care pleacă din punctul $v = 1$ și ajunge în punctul A de afix $\sqrt{-i} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (fig. II.61, *b*).

Avem

$$u = \operatorname{arctg} v = \frac{1}{2i} \ln \frac{i - v}{i + v}.$$

Punem

$$\frac{v - i}{v + i} = re^{i\theta}, \quad u = \frac{\theta + \pi}{2} - \frac{i}{2} \ln r.$$

Prin ipoteză $u = \frac{\pi}{4}$ pentru $z = 0$, adică pentru $v = 1$.

Valorile modulelor și argumentelor lui $v - i$ și $v + i$ compatibile cu toate aceste ipoteze sînt:

	Modul	Argument			r	θ
Inițial	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$-\frac{\pi}{2}$
Final	$\sqrt{\frac{1}{2}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=$ $=\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=$ $=\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{2}+\alpha$	α	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=$ $=1+\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

pentru $\alpha=\frac{\pi}{8}$. Avem deci în punctul $z = 1 + i$

$$u = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\ln(1 + \sqrt{2}).$$

Aceasta este valoarea luată pentru $u = \operatorname{arctg}\sqrt{1 - z}$ cînd z, cu excepția punctului $z = 0$, se află în punctul $1 + i$ și descrie segmentul de dreaptă $(0, 1 + i)$, valoarea inițială a lui u fiind fixată $\frac{\pi}{4}$. Valoarea lui u este determinată.

Observație. $\operatorname{arctg} v$ are două puncte critice $v = i$, $v = -i$, $v = \sqrt{1 - z}$ are punct critic $z = 1$ iar $u = \operatorname{arctg}\sqrt{1 - z}$ are două puncte critice $z = 1$ și $z = 2$. Valoarea lui u în punctul $1 + i$ depinde de valoarea inițială și de drumul parcurs de la 0 la $1 + i$.

Capitolul III

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ŞI TENSORIAL

§1. Elemente de calcul matriceal

Numim *vector n-dimensional* sau *n-vector* X peste cîmpul F o mulţime ordonată de n elemente $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ din F, adică

$$X = \| x_1, x_2, \ldots, x_n \|.$$

Elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *componentele vectorului* X.

Vectorii

$$X_j = \| x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn} \| \quad (j = 1, \ldots, m)$$

sînt *liniar dependenţi* peste F dacă există m elemente $k_1, k_2, \ldots, k_m$, nu toate nule astfel ca să avem

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots + k_m X_m = 0.$$

În caz contrar ei sînt *liniar independenţi*.

Un vector X_{m+1} se spune că poate fi exprimat ca o *combinaţie liniară* de vectori $X_1, X_2 \ldots, X_m$ dacă există elementele $k_1, k_2, \ldots, k_m$ din F astfel ca

$$X_{m+1} = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots + k_m X_m.$$

O *formă liniară* peste F în n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ este un polinom de tipul

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,$$

coeficienţii a_i fiind din F.

Considerăm un sistem de m forme liniare în n variabile

$$f_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n, \quad (j = 1, \dots, m)$$

și matricea asociată

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Dacă există elementele $k_1, k_2, \dots, k_m$, nu toate nule, în F astfel ca

$$k_1f_1 + k_2f_2 + \dots + k_mf_m = 0,$$

formele liniare (1) se numesc *liniar dependente*; în caz contrar ele sînt *liniar independente*.

Dependența sau independența liniară a formelor (1) este echivalentă cu dependența sau independența liniară a vectorilor-linii ai matricei A.

Spațiu vectorial. *Numim spațiu vectorial orice mulțime de n-vectori peste F care este închisă față de adunarea și înmulțirea cu scalar.*

Dacă $X_1, \dots, X_m$ sînt n-vectori peste F, mulțimea tuturor combinațiilor liniare

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_mX_m, \quad (k_i \in F) \tag{2}$$

formează un spațiu vectorial peste F.

Totalitatea n-vectorilor peste F formează un spațiu vectorial n-dimensional, $V_n(F)$, peste F.

Spunem că spațiul vectorial V_n este generat de n-vectorii $X_1, X_2, \dots, X_m$ dacă X_i sînt în V_n și fiecare vector din V_n este o combinație liniară de vectorii $X_1, X_2, \dots, X_m$.

Notăm prin $V_n^r(F)$ un spațiu vectorial r-dimensional format din n-vectori.

Numim *bază* a spațiului vectorial $V_n^r(F)$ o mulțime de r vectori liniar independenți și astfel încît fiecare vector din spațiu se exprimă ca o combinație liniară unică de vectori din bază.

Teorema 1. *Dacă $X_1, X_2, \dots, X_m$ sînt $m < n$, n-vectori liniar independenți din $V_n(F)$ și dacă $X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n$ sînt orice $n-m$ vectori din $V_n(F)$ care împreună cu $X_1, X_2, \dots, X_m$ formează o mulțime liniar independentă, atunci $X_1, \dots, X_n$ este o bază a lui $V_n(F)$.*

Teorema 2. Dacă $X_1, \ldots, X_n$ *sînt n-vectori liniar independenți peste F, atunci vectorii*

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j, \ (i = 1, \ldots, n)$$

sînt liniar independenți dacă și numai dacă $\|\alpha_{ij}\|$ *este nesingulară.*

Teorema 3. *Dacă* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *sînt* $m < n$, *n-vectori liniar independenți peste F, atunci p vectori*

$$Y_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} X_i \ (j = 1, \ldots, p)$$

sînt liniar dependenți dacă $p > m$, *sau dacă* $p \leqslant m$ și $\|s_{ij}\|$ *are rangul* $r < p$.

Spațiu sumă. Fie spațiile vectoriale $V_n^h(F)$ și $V_n^k(F)$. Mulțimea tuturor vectorilor $X + Y$ cu X din $V_n^h(F)$ și Y din $V_n^k(F)$ *se numește sumă.*

Spațiu de intersecție este format de intersecția a două spații vectoriale.

Intersecția a două spații vectoriale este mulțimea tuturor vectorilor comuni acestor două spații.

Transformarea liniară. Fie $X = \|x_1, x_2, \ldots, x_n\|'$ (transpusa matricei linie) și $Y = \|y_1, y_2, \ldots, y_n\|'$ doi vectori din $V_n(F)$, coordonatele lor existînd relativ la aceeași bază a spațiului. Presupunem că coordonatele lor sînt legate prin relațiile

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \ (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

sau, pe scurt

$$Y = AX,$$

unde $A = \|a_{ij}\|$ peste F. Atunci (3) este o transformare T care transformă orice vector X din $V_n(F)$ într-un vector Y din același spațiu, numit *imagine.*

Dacă (3) transformă X_1 în Y_1 și X_2 în Y_2 atunci :

(a) ea transformă kX_1 în kY_1, pentru orice scalar k;

(b) transformă $aX_1 + bX_2$ în $aY_1 + bY_2$, pentru orice pereche de scalari a și b.

O astfel de transformare se numește *liniară.*

Dacă în (3), $X = \|1, 0, \ldots, 0\|' = E_1$, atunci $Y = \|a_{11}, a_{21}, \ldots, \ldots, a_{n1}\|'$ și în general dacă $X = E_j$, atunci $Y = \|a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}\|'$.

Teorema 4. *O transformare liniară* (3) *este unic determinată cînd imaginile* (*Y-cilor*) *vectorilor bază sînt cunoscute, respectiv coloanele lui A fiind coordonatele acestor imagini ale acestor vectori.*

O transformare liniară este *nesingulară* dacă imaginile vectorilor distincţi X_i sînt vectori distincţi Y_i. În caz contrar transformarea este *singulară*.

Teorema 5. *O transformare liniară este nesingulară dacă şi numai dacă matricea A este nesingulară.*

Teorema 6. *O transformare liniară nesingulară transformă vectorii liniar independenţi (dependenţi) în vectori liniar independenţi (dependenţi).*

Două matrice A şi B se numesc *similare* dacă există o matrice nesingulară Q astfel încît $B = Q^{-1}AQ$.

Teorema 7. *Dacă $Y_Z = AX_Z$ este o transformare liniară din $V_n(F)$ relativ la o bază dată z şi $Y_W = BX_W$ este aceeaşi transformare liniară relativ la baza W, atunci A şi B sînt similare.*

Forme biliniare. O expresie care este liniară şi omogenă în fiecare mulţime de variabile $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ şi $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se numeşte *formă biliniară* în aceste variabile şi anume

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

sau

$$f(x, y) = X'AY,$$

unde $X = \|x_1, \ldots, x_m\|'$, $A = \|a_{ij}\|$ şi $Y = \|y_1, y_2, \ldots, y_n\|'$.

Teorema 8. *Orice formă biliniară peste F de rang r poate fi redusă prin transformări liniare nesingulare peste F la forma canonică*

$$u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_rv_r. \tag{4}$$

O formă biliniară se numeşte *simetrică, alternată, hermitiană* sau *alternat hermitiană* dacă matricea A este *simetrică, strîmb-simetrică, hermitiană sau strîmb-hermitiană.*

Forme pătratice O formă de tipul

$$q = X'AX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

ai cărei coeficienţi a_{ij} sînt elemente din F se numeşte *pătratică* peste F în variabilele $x_1, x_1, \ldots, x_n$.

Două forme pătratice sînt *echivalente* dacă şi numai dacă există o transformare liniară nesingulară $X = BY$ care împreună cu $Y = IX$ le transformă una în alta.

O formă pătratică de rang r se poate reduce la forma

$$h_1 y_1^1 + h_2 y_2^2 + \ldots + h_r y_r^2, \quad h_i \neq 0. \tag{5}$$

Orice formă pătratică reală se poate reduce prin transformări reale nesingulare la forma canonică

$$w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \ldots - w_r^2, \tag{6}$$

unde p este numărul de termeni pozitivi, iar r este rangul dat de forma pătratică.

Teorema 9. *Dacă $q = X'AX$ este o formă pătratică nesingulară peste F şi dacă $\alpha_{n-1,\,n-1} = \alpha_{nn} = 0$ cu $\alpha_{n,\,n-1} \neq 0$*, atunci tranformarea nesingulară peste F*

$$\left.\begin{aligned} x_i &= y_i + \alpha_{i,\,n-1} y_{n-1} + \alpha_{in} y_n \\ x_{n-1} &= \alpha_{n-1,\,n} y_n \\ x_n &= \alpha_{n,\,n-1} y_{n-1} \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

o transformă în

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_{ij} y_i y_j + 2\alpha_{n,\,n-1} p_n y_{n-1} y_n.$$

Apoi transformarea

$$\left.\begin{aligned} y_i &= z_i \\ y_{n-1} &= z_{n-1} - z_n \\ y_n &= z_{n-1} + z_n \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

o aduce la forma

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} a_{ij} z_i z_j + 2\alpha_{n;\,n-1} p_n (z_{n-1}^2 - z_n^2). \tag{7}$$

---

* α_{hk} este reciprocul elementului α_{kh} din matricea A.

Forme hermitiene. O formă definită prin

$$h = X'HX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\bar{x}_i x_j, \; \bar{h}_{ij} = h_{ji},$$

unde H este hermitiană şi componentele lui X sînt în cîmpul numerelor complexe se numeşte *formă hermitiană*. Dacă $r < n$, forma este singulară, în caz contrar nesingulară, dacă r este rangul lui H.

Forma canonică este

$$\bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \ldots + \bar{z}_p z_p - \bar{z}_{p+1} z_{p+1} - \ldots - \bar{z}_r z_r \tag{8}$$

unde p depinde de forma dată şi nu de transformarea care o reduce la forma (8).

Orice vector X pentru care

$$AX = \lambda X, \tag{9}$$

λ fiind scalar întreg din F, se numeşte *vector invariant* faţă de această transformare.

Din (9) obţinem ecuaţia $(\lambda I - A)X = 0$ sau

$$\begin{Vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \ldots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} \ldots & \lambda - a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = 0,$$

numită *ecuaţie caracteristică* a lui A, iar rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ se numesc *rădăcini caracteristice*.

Teorema 10. *Dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sînt distincte şi $X_1, \ldots, X_k$ sînt vectori invarianţi nenuli asociaţi acestor rădăcini, ei sînt liniar independenţi.*

Teorema 11. *Dacă λ_i este o rădăcină caracteristică de ordinul r a matricei pătratice de ordinul n, A, rangul lui $\lambda_i I - A$ nu este mai mic ca $n - r$ şi dimensiunea spaţiului vectorial invariant asociat nu este mai mare ca r. Dacă λ_i este rădăcină simplă, atunci rangul lui $\lambda_i I - A$ este $n - 1$ şi dimensiunea spaţiului vectorial invariant asociat este 1.*

Două matrice n-pătratice A şi B peste F se numesc *similare* peste F dacă există o matrice nesingulară R peste F astfel ca

$$B = R^{-1}AR.$$

Orice matrice n-pătratică A, similară cu o matrice diagonală, are n vectori invarianţi liniar independenţi şi reciproc.

Orice matrice n-pătratică A este similară cu o matrice triunghiulară ale cărei elemente pe diagonală sînt rădăcinile caracteristice ale lui A.

§ 2. Calcul tensorial

Spaţiul vectorial euclidian

Fie F_n un spaţiu *prehilbertian nedegenerat* (un spaţiu vectorial pe care este dată o formă hermitică pozitivă nedegenerată), n-dimensional, sau pe scurt un spaţiu vectorial euclidian.

Fie $\vec{e}_1 \ldots, \vec{e}_n$ o bază în spaţiul E_n şi

$$\vec{x} = x^i\vec{e}_i, \ \vec{y} = y^i\vec{e}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

doi vectori în acest spaţiu.

Produsul lor *scalar* este

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x^i y^j \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$$

sau

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = g_{ij} x^i y^j,$$

unde s-a notat cu $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$.

Definiţie. *Spaţiul vectorial euclidian E_n se numeşte spaţiu euclidian propriu dacă norma oricărui vector nenul este strict pozitivă.*

Doi vectori $\vec{x}$ şi $\vec{y}$ se numesc ortogonali dacă

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

Definiție. *Fie E_n un spațiu vectorial euclidian și $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ o bază oarecare în acest spațiu. Fiind dat vectorul $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$, cantitățile $x^1, x^2, \ldots, \ldots, x^n$ se numesc componentele contravariante ale vectorului x iar cantitățile $x_j = \langle \vec{x}, \vec{e}_j \rangle$, $(j = 1, \ldots, n)$ se numesc componentele covariante ale aceluiași vector $\vec{x}$.*

Avem

$$x_j = x^i \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle, \quad x_j = g_{ij} x^i$$

și

$$x^i = g^{ij} x_j,$$

unde $g^{ij} = \frac{\alpha^{ij}}{g}$, $g = \det \|g_{ij}\|$, α^{ji} fiind *complementul algebric* al elementului g_{ij} din g.

Fie E_n un spațiu vectorial n-dimensional și E_p un spațiu vectorial p-dimensional. Dacă $\vec{x}$ este un vector din E_n și $\vec{y}$ din E_p, perechea $(\vec{x}, \vec{y})$ notată cu $\vec{x} \otimes \vec{y}$ este un element dintr-un spațiu euclidian np-dimensional $E_n \otimes E_p$ numit *produsul tensorial al celor două spații*. $\vec{x} \otimes \vec{y}$ se numește *produsul tensorial al vectorilor* $\vec{x}$ și $\vec{y}$.

Tensori afini într-un spațiu vectorial. Fie E_n un spațiu vectorial euclidian n-dimensional și

$$E_n^{(q)} = E_n \otimes E_n \otimes \ldots \otimes E_n$$

spațiul vectorial n^q-dimensional, numit și *puterea q tensorială* a spațiului E_n.

Notînd cu $\vec{x}_{(1)}, \ldots, \vec{x}_{(q)}$, q vectori în spațiul E_n, ale căror componente contravariante sînt $x_{(1)}^{i_1}, \ldots, x_{(q)}^{i_q}$, avem

$$\vec{x}_{(1)} \otimes \ldots \otimes \vec{x}_{(q)} = x_{(1)}^{i_1} \ldots x_{(q)}^{i_q}.$$

Să considerăm spațiul vectorial E'_n, dualul spațiului E_n, raportat la baza $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ duala bazei $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, ($E'_n$ este spațiul formelor liniare definite pe E_n) și fie produsul tensorial

$$E_n^{(r_1)} \otimes E_n'^{(s_1)} \otimes \ldots \otimes E_n'^{(s_p)} \otimes E_n^{(r_m)}. \tag{10}$$

Elementele acestui spaţiu se numesc *tensori* afini ataşaţi spaţiului vectorial E_n.

Elementele spaţiului $E_n^{(q)}$ sînt *tensori afini de q ori contravarianţi*, iar elementele spaţiului $E_n'^{(q)}$ *sînt tensori afini de q ori covarianţi*.

Fie $r_1 = q - 2$, $r_2 = \ldots = r_m = 0$, $s_1 = 2$, $s_2 = \ldots = s_p = 0$, deci spaţiul (10) este

$$E_n^{(q-2)} \otimes E_n'^{(2)}. \tag{10'}$$

O bază a acestui spaţiu este

$$\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_{q-2}} \otimes x^{i_{q-1}} \otimes \ldots \otimes x^{i_q} = \varepsilon^{i_{q-1} i_q}_{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}.$$

Dacă notăm cu $t^{i_1 i_2}_{i_{q-1} i_q}$ componentele unui tensor T al spaţiului (10′), avem

$$T = t^{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q} \, \varepsilon^{i_{q-1} i_q}_{i_1 i_2 \cdots i_{j-2}}.$$

Notăm cu $x^{i_1}_{(1)}, x^{i_2}_{(2)}, \ldots, x^{i_{q-2}}_{(q-2)}$ *componentele contravariante* ale vectorilor $\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \ldots, \vec{x}_{(q-2)}$ şi cu $x_{(q-1) i_{q-1}}$, $x_{(q) i_q}$ *componentele contravariante* ale vectorilor $\vec{x}_{(q-1)}$ şi $\vec{x}_{(q)}$ avem

$$T = x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \ldots x^{i_{q-2}}_{i_{(q-2)}} \, x_{(q-1)\, i_{q-1}} x_{(q) i_q} \, \varepsilon^{i_{q-1} i_q}_{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}},$$

deci

$$t^{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q} = x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(1)} \ldots x^{i_{q-2}}_{(q-2)} \, x_{(q-1)\, i_{q-1}} x_{(q)\, i_q}.$$

Fie o schimbare a bazei $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ dată de ecuaţiile

$$\vec{e}_i = A^{j'}_i \vec{e}_{j'},$$

sau

$$\vec{e}_{j'} = A^i_{j'} \vec{e}_i, \quad A^i_{j'} A^{j'}_h = \delta^i$$

formulele de transformare ale componentelor contravariante, respectiv covariante sînt

$$x_i = A^{j'}_i x_{j'},$$

$$x_{j'} = A^i_{j'} x_i,$$

iar pentru tensori

$$t^{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q} = A^{i_1}_{j'_1} A^{i_2}_{j'_2} \cdots A^{i_{q-2}}_{j'_{q-2}} A^{j'_{q-1}}_{i_{q-1}} A^{j'_q}_{i_q} t^{j'_1 j'_2 \cdots j'_{q-2}}_{j'_{q-1} j'_q},$$

şi

$$t^{j'_1 j'_2 \cdots j'_{q-2}}_{j'_{q-1} j'_q} = A^{j'_1}_{i_1} A^{j'_2}_{i_2} \cdots A^{j'_{q-2}}_{i_{q-2}} A^{i_{q-1}}_{j'_{q-1}} A^{i_q}_{j'_q} t^{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q}.$$

Dacă tensorul T este contravariant, aceste formule devin

$$t^{i_1 i_2 \cdots i_q} = A^{i_1}_{j'_1} A^{i_2}_{j'_2} \cdots A^{i_q}_{j'_q} t^{j'_1 j'_2 \cdots j'_q},$$

$$t^{j'_1 j'_2 \cdots j^1_q} = A^{j'_1}_{i_1} A^{j'_2}_{i_2} \cdots A^{j'_q}_{i_q} t^{i_1 i_2 \cdots i_q},$$

iar dacă este covariant, avem

$$t_{i_1 i_2 \cdots i_q} = A^{j'_1}_{i_1} A^{j'_2}_{i_2} \cdots A^{j'_q}_{i_q} t_{j'_1 j'_2 \cdots j'_q},$$

$$t_{j'_1 j'_2 \cdots j'_q} = A^{i_1}_{j'_1} A^{i_2}_{j'_2} \cdots A^{i_q}_{j'_q} t_{i_1 i_2 \cdots i_q}.$$

Operaţii cu tensori :

$$t^{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q} + u^{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q} = s^{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}_{i_{q-1} i_q},$$

$$t^{i_1 i_2 \cdots i_{q-1}}_{i_q} \cdot u^{i_{q+2} \cdots i_{q+p}}_{i_{q+1}} = p^{i_1 \cdots i_{q-1} i_{q+2} \cdots i_{q+p}}_{i_q i_{q+1}}.$$

Tensori euclidieni. Fie E_n un *spaţiu vectorial euclidian*, E'_n dualul lui şi g_{ij} coeficienţii *formei pătratice fundamentale*.

Dacă $\vec{x}$ este un vector din E_n care are componentele contravariante x^i şi componentele covariante x_i, avem

$$x_i = g_{ij} x^j, \quad x^i = g^{ij} x_j$$

cu $g^{ij} = \frac{\alpha^{ij}}{g}$, α^{ij} fiind complementul algebric al elementului g_{ji} din determinantul $g = \det \|g_{ij}\|$.

Definiţie. *Diferiţi tensori afini obţinuţi din tensorul T contravariant de ordinul q,*

$$T = \vec{x}_{(1)} \otimes \ldots \otimes \vec{x}_{(q)}$$

prin înlocuirea unuia sau a mai multor vectori prin elementele corespunzătoare din E'_n constituie un singur tensor euclidian de ordinul q, admiţînd drept componente contravariante, covariante sau mixte componentele tensorilor afini contravarianţi, covarianţi sau micşti corespunzători.

Avem

$$t_{i_1 i_2 \ldots i_q} = g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \ldots g_{i_q j_q} t^{j_1 j_2 \ldots j_q},$$

$$t^{i_1 i_2 \ldots i_q} = g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \ldots g^{i_q j_q} t_{j_1 j_2 \ldots j_q}.$$

Tensorul g_{ij} se numeşte *tensor fundamental* al spaţiului E_n. Este un tensor simetric, deci are singurele componente mixte

$$g^i_j = g^{ik} g_{jk} = \delta^i_j.$$

Fie $\mathscr{E}_n$ un *spaţiu punctual euclidian n-dimensional* şi (R) un reper oarecare faţă de care un punct M are coordonatele $x^1, \ldots, x^n$.

Să considerăm o schimbare de coordonate

$$x^i = f^i(x^1, y^2, \ldots, y^n), \quad (i = 1, \ldots, n),$$

unde f^i sînt funcţii de două ori diferenţiabile într-un domeniu D_y în care avem

$$\frac{D(x^1, \ldots, x^n)}{D(y^1, \ldots, y^n)} \neq 0.$$

Putem interpreta variabilele $(y^1, \ldots, y^n)$ drept coordonate şi le numim *coordonate curbilinii* în spaţiul $\mathscr{E}_n$.

Dat fiind un sistem de coordonate curbilinii (y_i) și un punct $M \in \mathscr{E}_n$, asociem acestui punct un reper avînd originea în M și format din vectorii

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial y^i} \, (i = 1, \ldots, n)$$

numit și *reper natural* în punctul H al sistemului (y^i).

Pornind de la problema determinării reperului natural $(M + \mathrm{d}\vec{M}, \vec{e}_i + \mathrm{d}\vec{e}_i)$ în punctul $M + \mathrm{d}\vec{M}$ față de reperul natural $(M, \vec{e}_i)$ în punctul M, avem

$$\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}y^i \vec{e}_i, \quad \mathrm{d}\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j,$$

ω_i^j fiind forme liniare în raport cu vectorul $\mathrm{d}\vec{M}$, deci

$$\omega_i^j = \Gamma_{ki}^j \mathrm{d}y^k,$$

unde Γ_{ki}^j sînt n funcții de variabilele $y^1, \ldots, y^n$.

Notăm

$$\Gamma_{kji} = g_{jh} \Gamma_{ki}^h.$$

Cantitățile Γ_{kji} se mai notează $[ki, j]$ și se numesc *simbolurile lui Christoffel de prima speță*, iar cantitățile Γ_{ki}^j se mai notează $\{{}^{j}_{ki}\}$ și se numesc *simbolurile Christoffel de speța a doua*. Simbolurile lui Christoffel nu constituie componentele unui tensor. Avem

$$\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k},$$

$$\Gamma_{kji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j} \right),$$

$$\Gamma_{ki}^j = g^{jh} \Gamma_{khi},$$

iar la o schimbare de coordonate curbilinii

$$y^i = y^i(y^{1'}, y^{2'}, \ldots, y^{n'}), \; (i = 1, \ldots, n)$$

avem

$$\Gamma_{l'i}^j = \frac{\partial y^{l'}}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial y^{n'}}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial y^{m'}} \Gamma_{n'l'}^{m'} + \frac{\partial^2 y^{l'}}{\partial y^k \partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial y^{e'}}.$$

Componentele tensorului derivată covariantă a tensorului T sînt

$$\Delta_k t^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} = \frac{\partial t^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}}{\partial y^k} + \Gamma^{i_1}_{l_k} t^{l i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} + \ldots \Gamma^{i_2}_{l_k} t^{i_1 l i_3 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} + \ldots$$

$$\ldots + \Gamma^{i_r}_{l_k} t^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} - \Gamma^{l}_{j_1 k} t^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{l j_2 \ldots j_s} - \ldots - \Gamma^{l}_{j_s k} t^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots l}$$

Definiţie. *Un spaţiu n-dimensional de coordonate* $(y^1, \ldots, y^n)$ *în care produsul scalar este dat de*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = G_{ij} u^i v^j,$$

$\vec{u}$ *şi* $\vec{v}$ *fiind doi vectori în acest spaţiu iar* G_{ij} *sînt funcţii arbitrare diferenţiabile de variabilele* $y^1, \ldots, y^n$, *se numeşte spaţiu riemannian n-dimensional,* V_n. *Mărimea* G_{ij} *este tensorul riemannian fundamental.*

Definim simbolurile lui Christoffel

$$\Gamma_{ikj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial G_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial G_{ki}}{\partial y^j}\right),$$

$$\Gamma^j_{ik} = G^{jl}\Gamma_{ilk}.$$

La o schimbare de variabile avem

$$\Gamma'^j_{ik} = \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} \frac{\partial y'^\alpha}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial y'^\gamma}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial y'^\beta} + \frac{\partial y^j}{\partial y'^\alpha} \frac{\partial^2 y'^\alpha}{\partial y^i \partial y^k}.$$

Ecuaţia diferenţială a geodezicelor spaţiului V_n este

$$\frac{d^2 y^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kh} \frac{dy^k}{dt} \cdot \frac{dy^h}{dt} = 0.$$

Dacă V_n este un spaţiu euclidian, avem $\Gamma^i_{kh} = 0$.

PROBLEME

§ 1. Elemente de calcul matriceal

III.1. Să se arate că fiecare triplet de vectori

$$1^\circ \quad \begin{array}{l} X_1 = \| 1, \ 2, \ -3, \ 4 \| \\ X_2 = \| 3, \ -1, \ 2, \ 1 \| \\ X_3 = \| 1, \ -5, \ 8, \ -7 \| \end{array} \quad \text{şi} \quad 2^\circ \quad \begin{array}{l} X_1 = \| 2, \ 3, \ 1, \ -1 \| \\ X_2 = \| 2, \ 3, \ 1, \ -1 \| \\ X_3 = \| 4, \ 6, \ 2, \ -2 \| \end{array}$$

este liniar dependent şi să se determine o submulţime maximă de vectori independenţi exprimîndu-se ceilalţi vectori ca combinaţii liniare ai acestora.

R. 1° Matricea

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 8 & -7 \end{Vmatrix}$$

are rangul 2, deci există doi vectori liniar independenţi. Fie aceşti vectori X_1 şi X_2. Minorul $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Să considerăm minorul

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}.$$

Complementii algebrici ai elementelor ultimei coloane sînt -14, 7, -7. Atunci

$$-14X_1 + 7X_2 - 7X_3 = 0,$$

adică

$$X_3 = -2X_1 + X_2.$$

2° Matricea

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{Vmatrix}$$

are rangul 2, deci există doi vectori liniar independenţi, fie X_1 şi X_2. Minorul $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix} = 0$; schimbînd coloanele 2 şi 4 între ele, obţinem matricea

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{Vmatrix}$$

pentru care $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$. Complementii algebrici ai elementelor ultimei coloane din determinantul

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

sînt 2, 2, -2. Atunci

$$2X_1 + 2X_2 - 2X_3 = 0,$$

adică

$$X_3 = X_1 + X_2.$$

III.2. Să se determine natura dependenței dintre formele liniare:

$$f_1 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4,$$
$$f_3 = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4,$$
$$f_3 = 5x_1 - 9x_2 + 8x_3 - x_4.$$

R. Matricea

$$\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -9 & 8 & -1 \end{Vmatrix}$$

are rangul 2, deci există două forme liniar independente. Fie acestea f_1 și f_2. Minorul $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Considerăm minorul

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -9 & 8 \end{vmatrix}.$$

Complementii algebrici ai elementelor ultimei coloane sînt -33, 22, 11, deci

$$-33f_1 + 22f_2 + 11f_3 = 0$$

sau

$$3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0,$$

de unde rezultă că aceste forme sînt liniar dependente.

III.3. Să se arate că dacă două spații vectoriale $V_n^h(F)$ și $V_n^k(F)$ au $V_n^s(F)$ ca spațiu sumă și $V_n^t(F)$ ca spațiu de intersecție, atunci $h + k = s + t$.

R. Presupunem $t = h$; atunci $V_n^h(F)$ este un subspațiu al lui $V_n^t(F)$ și suma lor este spațiul V_n^k. Astfel, $s = k$, $t = h$ și $s + t = h + k$. Este ușor de arătat că acesta este adevărat dacă $t = k$.

Presupunem că $t < h$, $t < k$ și fie $X_1, X_2, \ldots, X_t$ generatorii lui $V_n^t(F)$. Atunci conform teoremei (1) există vectorii $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots, Y_h$ astfel că $X_1, X_2, \ldots, X_t, Y_{t+1}, \ldots, Y_h$ generează $V_n^h(F)$ și vectorii $Z_{t+1}, \ldots, Z_k$ astfel că $X_1, X_2, \ldots, X_t, Z_{t+1}, \ldots, Z_k$ generează $V_n^k(F)$.

Vom presupune acum că există scalarii $(a_n)_{n \in N}$ și $(b_n)_{n \in N}$ astfel ca

$$\sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{h} a_i Y_i + \sum_{i=t+1}^{k} b_i Z_i = 0 \tag{1}$$

sau

$$\sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{h} a_i Y_i = \sum_{i=t+1}^{k} - b_i Z_i.$$

Vectorul din stînga se află în $V_n^h(F)$ și după membrul drept se află de asemenea în $V_n^k(F)$ atunci el se află în $V_n^t(F)$.

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_t$ generatorii lui $V_n^t(F)$; rezultă $a_{t+1} = a_{t+2} = \ldots = a_h = 0$ și din (1) obținem

$$\sum_{i=1}^{k} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{k} b_i Z_i = 0.$$

Dar X-ii și Y-ii sînt liniar independenți astfel că $a_1 = a_2 = \ldots = a_t = b_{t+1} = \ldots = b_k = 0$; atunci X, Y, Z sînt mulțimi liniar independente și generează $V_n^s(F)$. Atunci

$$s = h + k - t.$$

III.4. Considerăm ${}_1V_3^2(F)$ avînd $X_1 = \|1, 2, 3\|'$ și $X_2 = \|1, 1, 1\|'$ ca bază și ${}_2V_3^2(F)$ avînd $Y_1 = \|3, 1, 2\|'$ și $Y_2 = \|1, 0, 1\|'$ ca bază. Să se arate că spațiul sumă este $V_3(F)$. Să se determine o nouă bază.

R. Avem $h + k = s + t$ și matricea

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

are rangul trei, deci spațiul de intersecție este un $V_3^1(F)$. Pentru o nouă bază scriem combinația liniară de vectori din bazele lui ${}_1V_3^2(F)$ și ${}_2V_3^2(F)$ ca

$$aX_1 + bX_2 = cY_1 + dY_2,$$

unde convenim să luăm $d = 1$. Rezolvînd sistemul

$$\left.\begin{aligned} a + b - 3c &= 1 \\ 2a + b - c &= 0 \\ 3a + b - 2c &= 1 \end{aligned}\right\}$$

obținem $a = 1/3$, $b = -4/3$, $c = -2/3$. Atunci

$$aX_1 + bX_2 = \|-1, -2/3, -1/3\|'$$

este o bază pentru spațiul de intersecție. Vectorul $\|3, 2, 1\|'$ este de asemenea în bază. Deci, ca bază se mai poate lua X_1, X_2 și Y_1.

III.5. Fie $X = \|1, 2, 1\|'$ relativ la baza E. Să se determine componentele sale relativ la o nouă bază $Z_1 = \|1, 1, 0\|'$, $Z_2 = \|1, 0, 1\|'$ și $Z_3 = \|1, 1, 1\|'$.

R. (a) Scriem

$$X = aZ_1 + bZ_2 + cZ_3$$

sau

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} = a \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + b \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + c \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Rezultă

$$\left.\begin{aligned} a+b+c&=1\\ a+c&=2\\ b+c&=1 \end{aligned}\right\}$$

și $a=0$, $b=-1$, $c=2$. Deci relativ la baza Z avem

$$X = \|0, -1, 2\|.$$

(b) Ajungem la același rezultat astfel:
Scriind (1) ca $X = \|Z_1, Z_2, Z_3\| X_Z = ZX_Z$ avem

$$X_Z = Z^{-1}X = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} = \|0, -1, 2\|'.$$

III.6. Fie X_Z și X_W coordonatele vectorului X relativ la două baze $Z_1 = \|1, 1, 0\|'$, $Z_2 = \|1, 0, 1\|'$, $Z_3 = \|1, 1, 1\|'$ și $W_1 = \|1, 1, 2\|'$, $w_2 = \|2, 2, 1\|'$, $W_3 = \|1, 2, 2\|'$. Să se determine matricea P astfel ca să avem $X_W = PX_Z$.

R. Avem

$$Z = \|Z_1Z_2Z_3\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}; \quad W = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \quad \text{și} \quad W^{-1} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Rezultă

$$P = W^{-1}Z = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

III.7. a) Să se determine transformarea liniară $Y = AX$ care transformă E_1 în $Y_1 = \|1, 2, 3\|'$, E_2 în $Y_2 = \|3, 1, 2\|'$ și E_3 în $Y_3 = \|2, 1, 3\|'$.

b) Să se determine imaginile lui $X_1 = \|1, 1, 1\|'$, $X_2 = \|3, -1, 4\|'$ și $X_3 = \|4, 0, 5\|'$.

c) Să se arate că X_1 și X_2 sînt liniar independente și de asemenea și imaginile lor.

d) Să se arate că X_1, X_2 și X_3 sînt liniar dependente și de asemenea și imaginile lor.

R. a) Din teorema (4) rezultă $A = \| Y_1, Y_2, Y_3 \|$, iar ecuația transformării liniare este

$$Y = AX = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{Vmatrix} X.$$

b) Imaginea lui $X_1 = \| 1, 1, 1 \|'$ este

$$Y_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{Vmatrix}.$$

Imaginile lui X_2 şi X_3 sînt respectiv $Y_2 = \|8, 9, 19\|'$ şi $Y = \|14, 13, 27\|'$.

c) Rangul matricelor $\|X_1, X_2\| = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}$ şi $\|Y_1, Y_2\| = \begin{Vmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 9 \\ 8 & 19 \end{Vmatrix}$ este 2.

Atunci X_1 şi X_2 sînt liniar independente şi de asemenea şi imaginile lor.

d) Avem $X_3 = X_1 + X_2$ şi $Y_3 = Y_1 + Y_2$ deci X_1, X_2, X_3 şi imaginile lor sînt liniar dependente.

III.8. Dacă $Y_Z = AX_Z = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{Vmatrix} . X_Z$ este o transformare liniară relativ la baza Z formată din $Z_1 = \|1, 1, 0\|'$, $Z_2 = \|1, 0, 1\|'$ şi $Z_3 = \|1, 1, 1\|'$, să se determine tansformarea $Y_W = BX_W$ relativ la baza $W_1 = \|1, 1, 2\|'$. $W_2 = \|2, 2, 1\|'$, $W_3 = \|1, 2, 2\|'$.

R. Avem (v. problema 6)

$$X_W = PX_Z = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{Vmatrix} X_Z.$$

Rezultă

$$X_Z = P^{-1}X_W = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix} X_W = QX_W$$

şi

$$Y_W = PY_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} -2 & 14 & -6 \\ 7 & 14 & 9 \\ 0 & -9 & 3 \end{Vmatrix} X_W.$$

III.9. Să se reducă la forma (5) (v. Introducere) forma pătratică

$$q = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 8x_1x_2 + 12x_1x_3 + 8x_1x_4 + \\ + 18\,x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4.$$

R. Avem

$$q = 2[x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)] + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - \\ - 16x_3x_4 = 2[x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4) + (2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2] + 5x_2^2 + 19x_3^2 - \\ - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 - 2(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 = 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \\ + 2x_4)^2 - 3[x_2^2 + 2x_2(x_3 + 4x_4)] + x_3^2 - 32x_4^2 - 40x_3x_4 = 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \\ + 2x_4)^2 - 3(x_2 + x_3 + 4x_4)^2 + 4(x_3 - 2x_4)^2.$$

Deci transformarea

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ y_2 &= \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 + 4x_4 \\ y_3 &= \phantom{x_1 + 2x_2 + {}} x_3 - 2x_4 \\ y_4 &= \phantom{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + {}} x_4 \end{aligned}\right\}$$

reduce q la forma

$$2y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2.$$

III.10. Să se reducă la forma (5) următoarea formă pătratică:

$$X'AX = X' \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{Vmatrix} \cdot X.$$

R. Aplicăm metoda lui Kronecker. Avem $\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ dar $\alpha_{32} = -1 \neq 0$. Transformarea nesingulară

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ x_2 = \qquad\qquad\quad \alpha_{23}y_3 \\ x_3 = \qquad \alpha_{32}y_2 \qquad\quad \end{array}\right\} \quad \text{sau} \quad X = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot Y$$

reduce $X'AX$ la forma

$$Y' \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} Y = Y' \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot Y = Y'BY = y_1^2 + 2y_2y_3.$$

Transformarea

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - z_3 \\ y_3 = z_2 + z_3 \end{array}\right\} \quad \text{sau} \quad Y = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot Z$$

transformă $Y'BY$ în

$$Z' \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot Z = Z' \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix} Z = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2.$$

III.11. Să se demonstreze că dacă o formă pătratică reală q este transformată prin două transformări nesingulare în două forme reduse distincte

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2, \tag{1}$$

și

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - y_{q+2}^2 - \ldots - y_r^2, \tag{2}$$

atunci $p = q$.

R. Presupunem $q > p$. Fie $X = FY$ transformarea prin care se ajunge la (1) și $X = GY$ transformarea prin care se ajunge la (2). Atunci avem

$$Y = F^{-1}X = \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n \end{cases}$$

şi

$$Y = G^{-1}X = \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n \end{cases}$$

Ţinînd seama de (1) şi (2), obţinem:

$$(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n)^2 + \ldots + (b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \ldots + b_{pn}x_n)^2 -$$

$$-(b_{p+1,1}x_1 + b_{p+1,2}x_2 + \ldots + b_{p+1,n}x_n)^2 - \ldots - (b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \ldots + b_{rn}x_n)^2 =$$

$$=(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n)^2 + \ldots + (c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \ldots + c_{qn}x_n)^2 -$$

$$-(c_{q+1,1}x_1 + c_{q+1,1}x_2 + \ldots + c_{q+1,1}x_n)^2 - \ldots - (c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \ldots + c_{rn}x_n)^2. \qquad (3)$$

Considerăm $r - q + p < r$ ecuaţii:

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{p1}x_1 + bp_2x_2 + \ldots + b_{pn}x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} c_{q+1,1}x_1 + c_{q+1,2}x_2 + \ldots + c_{q+1,n}x_n = 0 \\ c_{q+2,1}x_1 + c_{q+2,2}x_2 + \ldots + c_{q+2,n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \ldots + c_{rn}x_n = 0. \end{array}\right\}$$

Acest sistem are o soluţie diferită de cea banală, fie $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Înlocuind în (3), avem

$$-(b_{p+1,1}\alpha_1 + b_{p+1,2}\alpha_2 + \ldots + b_{p+1,n}\alpha_n)^2 - \ldots - (b_{r1}\alpha_1 + b_{r2}\alpha_2 + \ldots + b_{rn}\alpha_n)^2 =$$

$$= (c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \ldots + c_{1n}\alpha_n)^2 + \ldots + (c_{q1}\alpha_1 + c_{q2}\alpha_2 + \ldots + c_{qn}\alpha_n)^2.$$

Este clar că acestea necesită ca fiecare din paranteze să fie zero. Dacă nu, atunci nici unul din F sau G nu este nesingular, contrar ipotezei. Deci $q \leqslant p$. Repetînd raţionamentul pentru $q < p$, se ajunge din nou la o contradicţie deci $q = p$.

III.12. Dată fiind matricea

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$$

să se determine rădăcinile caracteristice şi vectorii invarianţi asociaţi.

R. Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{Vmatrix} \lambda - 2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{Vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0,$$

iar rădăcinile caracteristice sînt $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$.

Dacă $\lambda = \lambda_1 = 5$, avem pentru $(\lambda I - A)\,X$

$$\begin{Vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = 0,$$

deoarece matricele $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ sînt echivalente.

O soluție este dată de $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; deci rădăcinii caracteristice $\lambda = 5$ îi corespunde vectorul $\| 1, 1, 1 \|'$ care generează un spațiu vectorial unidimensional. Orice vector $\| k, k, k \|'$ al acestui spațiu este un vector invariant al lui A.

Dacă $\lambda = \lambda_2 = 1$, avem

$$\begin{Vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = 0$$

sau

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

Avem două soluții liniar independente $(2, -1, 0)$ și $(1, 0, -1)$. Deci rădăcinii caracteristice $\lambda = 1$ i se asociază spațiul vectorial cu două dimensiuni generat de $X_1 = \| 2, -1, 0 \|'$, $X_2 = \|1, 0, -1 \|'$. Orice vector $hX_1 + kX_2 = \|2h + k, -h, -k \|'$ este un vector invariant al lui A.

III.13. Dacă λ este o matrice pătratică de ordinul n, să se arate că

$$\Phi(\lambda) = | \lambda I - A | = \lambda^n + s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} + \ldots + s_{n-1}\lambda + (-1)^n | A |,$$

unde s_m, $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$, este $(-1)^m$ înmulțit cu suma tuturor minorilor principali pătratici de ordinul m ai lui A.

Pentru

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{Vmatrix}$$

să se determine rădăcinile caracteristice și spațiile vectoriale invariante.

R. Scriem $|\lambda I - A|$ sub forma

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a - a_{12} \ldots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} \ldots & 0 - a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} \ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

și, fiecare element fiind un binom, presupunem că determinantul se poate exprima ca suma a 2^n determinanți. Unul din acești determinanți are pe λ ca element diagonal și zero în rest; valoarea lui este λ^n. Altul este fără λ; valoarea lui este $(-1)^n | A |$. Determinanții rămași au m coloane, $m = 1, 2, \ldots, n-1)$, din $-A$ și $n-m$ coloane fiecare conținînd un element λ.

Considerăm unul din aceşti dterminanţi şi presupunem că coloanele lor numerotate $i_1, i_2, \ldots, i_m$ sînt coloanele lui $-A$.

După transformări elementare acest determinant se scrie

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} \ldots a_{i_1,i_m} & & & & \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} \ldots a_{i_2,i_m} & & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & 0 & \\ a_{i_m,i_1} & a_{i_m,i_2} \ldots a_{i_m,i_m} & & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & \\ & & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ & & & & \ldots\ldots & \\ a_{i_n,i_1} & a_{i_n,i_2} \ldots a_{i_n,i_m} & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{vmatrix} = (-1)^m \left| A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right| \lambda^{n-m}$$

unde $\left| A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right|$ este minorul pătratic de ordinul m, principal al lui A.

Deci

$$s_m = (-1)^m \sum_{\rho} \left| A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right|$$

$$\text{cu } \rho = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \ldots m}.$$

Pentru A dat în cazul particular avem:

$$s_1 = 1 + 0 - 2 + 6 = 5,$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 9,$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 7.$$

$$|A| = 2,$$

deci

$$|\lambda I - A| = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2.$$

Rădăcinile caracteristice sînt 1, 1, 1, 2.

Pentru $\lambda = 2$ avem

$$\lambda I - A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Această matrice are rangul 3. Spațiul vectorial invariant asociat este generat de $\|2, 3, -2, -3\|'$.

Pentru $\lambda = 1$, rezultă matricea

$$\lambda I - A = \begin{Vmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -5 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

și are rangul 3, deci spațiul vectorial invariant asociat este generat de $\|3, 6, -4, -5\|'$.

III.14. Fie λ_1, X_1; λ_2, X_2; λ_3, X_3 rădăcinile caracteristice distincte și vectorii invarianți asociați matricei A.

Să se arate că X_1, X_2, X_3 sînt liniar independenți.

R. Presupunem că acești vectori nu sînt liniar independenți, deci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nu toți nuli astfel ca

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0. \tag{1}$$

Înmulțind cu A și ținînd seama de faptul că $AX_i = \lambda_i X_i$, avem

$$\alpha_1 A X_1 + \alpha_2 A X_2 + \alpha_3 A X_3 = \alpha_1 \lambda_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 + \alpha_3 \lambda_3 X_3 = 0. \tag{2}$$

Înmulțind acum (2) cu A, obținem

$$\alpha_1 \lambda_1^2 X_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 X_2 + \alpha_3 \lambda_3^2 X_3 = 0. \tag{3}$$

Scriem acum egalitățile (1), (2) și (3) sub forma

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 & X_1 \\ \alpha_3 & X_2 \\ \alpha_3 & X_3 \end{Vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Dar

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

deci există B^{-1}. Înmulțind (4) cu B^{-1}, avem

$$\|\alpha_1 X_1, \alpha_2 X_2, \alpha_3 X_3\|' = 0,$$

de unde rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă că X_1, X_2, X_3 sînt liniar independenți.

III.15. Să se arate că două matrice similare au aceleași rădăcini caracteristice.

R. Fie A și $B = R^{-1}AR$ matricele similare. Atunci

$$\lambda I - B = \lambda I - R^{-1}AR = R^{-1}\lambda I R - R^{-1}AR = R^{-1}(\lambda I - A)\, R$$

și

$$|\lambda I - B| = |R^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |R| = |\lambda I - A|;$$

deci A și B au aceleași ecuații caracteristice deci au aceleași rădăcini caracteristice.

III.16. Să se arate că dacă o matrice pătrată de ordinul n are n vectori invarianţi liniar independenţi, atunci este similară cu o matrice diagonală.

R. Fie vectorii liniar independenţi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ asociaţi cu rădăcinile caracteristice corespunzătoare $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ astfel încît $AX_i = \lambda_i X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ şi fie $R = \|X_1, X_2, \ldots, X_n\|$. Atunci

$$AR = \|AX_1, AX_2, \ldots, AX_n\| = \|\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots, \lambda_n X_n\| =$$

$$= \|X_1, X_2, \ldots, X_n\| \cdot \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix} = R \operatorname{diag.} (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Rezultă

$$R^{-1}AR = \operatorname{diag.} (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

III.17. Să se determine o matrice nesingulară Q astfel ca $Q^{-1}AQ$ să fie triunghiulară, dacă

$$A = \begin{Vmatrix} 9 & -1 & 8 & -9 \\ 6 & -1 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -4 \end{Vmatrix}.$$

R. Avem

$$|\lambda I - A| = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4)$$

şi rădăcinile caracteristice sînt $1, -1, 2, -2$. Obţinem $\|5, 5, -1, 3\|'$ un vevctor invariant corespunzător rădăcinii caracteristice 1 ca primă coloană a unei matrice nesingulare Q_1, iar celelalte coloane vectori elementari, adică

$$Q = \begin{Vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Avem

$$Q_1^{-1} = \frac{1}{5} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix} \quad \text{şi} \quad Q_1^{-1} A Q_1 = \frac{1}{5} \begin{Vmatrix} 5 & -1 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -15 & 20 \\ 0 & 4 & -12 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{Vmatrix}.$$

O rădăcină caracteristică a lui A_1 este -1 şi vectorul invariant asociat este $\|4, 0, -1\|'$. Luăm

$$Q_2 = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Avem

$$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \frac{1}{20}\begin{Vmatrix} -20 & -15 & 20 \\ 0 & -48 & 64 \\ 0 & -11 & 48 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}.$$

O rădăcină caracteristică a lui A_2 este 2 și un vector invariant asociat $\|8, 11\|'$. Luăm

$$Q_2 = \begin{Vmatrix} 8 & 0 \\ 11 & 1 \end{Vmatrix}$$

și obținem

$$Q_3^{-1}A_2Q_3 = \begin{Vmatrix} 2 & 2/5 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Rezultă

$$Q = Q_1 \cdot \begin{Vmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -1 & 11 & 1 \end{Vmatrix}$$

și

$$Q^{-1}AQ = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -7 & -9/5 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}.$$

III.18. Să se determine o matrice unitară U astfel ca $U^{-1}AU$ să fie triunghiulară și avînd ca elemente diagonale rădăcinile caracteristice ale matricei

$$A = \begin{Vmatrix} 5+5i & -1+i & -6-4i \\ -1-6i & 2-2i & 6+4i \\ 2+3i & -1+i & -3-2i \end{Vmatrix}.$$

R. Ecuația caracteristică a lui A este

$$\lambda[\lambda^2 + (-4-i)\lambda + 5 - i] = 0$$

și are rădăcinile caracteristice $0, 1-i, 3+2i$.

Pentru $\lambda = 0$, avem $\|1, -1, 1\|'$ ca vector invariant asociat și formăm

$$Q_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Prin procedeul Gram-Schmidt obținem matricea unitară

$$u_1 = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Rezultă

$$U_1 A U_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -2(1-i) & -(26+24i)/\sqrt{6} \\ 0 & 1-i & (2+3i)/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3+2i \end{Vmatrix}$$

astfel că, pentru această alegere a lui Q_1 am obținut matricea $U = U_1$.

§ 2. Calcul Tensorial

III.19. Să se arate că fiecare din cantitățile 1° dx^k și 2° $\dfrac{\partial\Phi(x^1,\ldots,x^N)}{\partial x^k}$ constituie componentele unui tensor și să i se determine ordinul.

R. 1° Fie transformarea de coordonate $\bar{x}^j = \bar{x}^j(x^1,\ldots,x^N)$. Atunci

$$d\bar{x}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\, dx^k.$$

Rezultă că dx^k este un tensor contravariant de ordinul întîi sau un vector contravariant.

2° Supusă transformării $x^k = x^k(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^N)$, Φ este o funcție de x^k și deci de $\bar{x}^j$, astfel că $\Phi(x^1,\ldots,x^N) = \bar{\Phi}(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^N)$, adică Φ este un scalar sau invariant. Avem

$$\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{x}^j} = \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{x}^j} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^j} = \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^j}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x^k},$$

deci $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^k}$ este un tensor covariant de ordinul întîi sau un vector covariant.

Tensorul cu componentele $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x^k}$ este grad Φ sau $\vec{\nabla}\Phi$.

III.20. Un tensor covariant are componentele xy, $2y - z^2$, xz în coordonate rectangulare. Să se scrie componentele lui covariante în coordonate sferice.

R. Notăm cu a_j componentele covariante în coordonate rectangulare $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Atunci

$$a_1 = xy = x^1x^2;\ a_2 = 2y - z^2 = 2x^2 - (x^3)^2;\ a_3 = xz = x^1x^3.$$

Vom nota cu a'_k componentele covariante în coordonate sferice $y^1 = r$, $y^2 = 0$, $y^3 = \varphi$. Atunci

$$a'_k = \frac{\partial x^j}{\partial y^k}\, a_j. \tag{1}$$

Avem

$$x^1 = y^1 \sin y^2 \cos y^3$$
$$x^2 = y^1 \sin y^2 \sin y^3$$
$$x^3 = y^1 \cos y^2$$

Ţinînd seama de relaţiile (1), rezultă

$$a_1' = \frac{\partial x^1}{\partial y^1} a_1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^1} a_2 + \frac{\partial x^3}{\partial y^1} a_3 = (\sin y^2 \cos y^3)(x^1 x^2) +$$

$$+ (\sin y^2 \sin y^3)[2x^2 - (x^3)^2] + \cos y^2 \cdot x^1 \cdot x^3 = \sin\theta \cos\varphi \cdot (r^2 \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi) +$$

$$+ (\sin\theta \sin\varphi)(2r \sin\theta \sin\varphi - r^2 \cos^2\theta) + \cos\theta (r^2 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi),$$

$$a_2' = \frac{\partial x^1}{\partial y^2} a_1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} a_2 + \frac{\partial x^3}{\partial y^2} a_3 = r^3 \cdot \sin^2\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi +$$

$$+ r \cos\theta \sin\varphi (2r \sin\theta \cdot \sin\varphi - r^2 \cos^2\theta) - r^3 \cdot \sin^2\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi.$$

III.21. Dacă a^i, b^j sînt componentele contravariante a doi vectori iar c_{ij} şi d_i^j tensori, să se arate :

1° $a^i c_{ij}$ sînt componentele unui vector covariant ;

2° $c_{ij} a^i b^j$ şi $d_j^i a^i b_j$ sînt scalari.

R. Avem

$$1^\circ \; a^i \cdot c_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x'^h}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x'^h}{\partial x^j} a'^j c_{hk}' = \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \delta_j^h a'^j c_{hk}'$$

sau

$$a^i c_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x'^j} a'^h c_{hk}'.$$

$$2^\circ \; c_{ij} a^i b^j = \frac{\partial x'^h}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \cdot c_{hk}' \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} a'^r \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x'^s} b'^s = \delta_r^h \delta_s^k c_{hk}' a'^r b'^s = c_{rs}' a'^r b'^s,$$

$$d_i^j a^i b_j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^h} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} d_k'^h \frac{\partial x^i}{\partial x'^s} a'^s \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} b_r' = \delta_h^r \delta_s^h d_k'^h a'^s b_r' = a'^s b_r' d_s'^r.$$

III.22. Fie componentele a trei tensori a_r^{pq}, b_r^{pq}, b_t^s.

1° Să se calculeze tensorul sumă şi tensorul diferenţă dintre tensorii a_r^{pq} şi b_r^{pq}.

2° Să se arate că $a_r^{pq} \cdot b_t^s = c_{rt}^{pqs}$ sînt componentele unui tensor.

R. 1° a_r^{pq} şi b_r^{pq} fiind componentele a doi tensori avem

$$a_l'^{jk} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} a_r^{pq}, \tag{1}$$

$$b_l'^{jk} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x_l'^l} b_r^{pq}.$$

Deci

$$(a_l'^{jk} + b_l'^{jk}) = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} (a_r^{pq} + b_r^{pq})$$

şi

$$(a_l'^{jk} - b_l'^{jk}) = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} (a_r^{pq} - b_r^{pq}).$$

Rezultă că $a_r^{pq} + b_r^{pq}$ şi $a_r^{pq} - b_r^{pq}$ sînt componentele unor tensori de acelaşi ordin şi tip.

2° Avem $b_n'^m = \frac{\partial x'^m}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^n} b_t^s$. (2)

Deci (1) şi (2) prin înmulţire rezultă

$$a_l'^{jk} b_n'^m = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} \cdot \frac{\partial x'^m}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^n} a_r^{pq} b_t^s.$$

Deci produsul $a_r^{pq} b_t^s$ constituie componentele unui tensor de ordinul cinci contravariant în indicii p, q, s şi covariant în indicii r, t.

III.23. Dacă o cantitate $A(p, q, r)$ este astfel încît într-un sistem de coordonate x^i, $A(p, q, r) B_r^{qs} = C_p^s$, unde B_r^{qs} sînt componentele unui tensor arbitrar şi C_p^s componentele altui tensor, să se arate că $A(p, q, r)$ sînt componentele unui tensor.

R. În transformarea de coordonate x'^i, $A'(j, k, l) B_l'^{km} = C_j'^m$.

Atunci

$$A'(j, k, l) \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x'^m}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} B_r^{qs} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} C_p^s = \frac{\partial x'^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \cdot A(p, q, r) B_r^{qs}.$$

sau

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^s} \left[\frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} A'(j, k, l) - \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} A(p, q, r) \right] B_r^{qs} = 0.$$

Înmulţind cu $\frac{\partial x^n}{\partial x'^t}$ şi făcînd $t = m$ $\left(\text{sau multiplicînd interior cu } \frac{\partial x^n}{\partial x'^m}\right)$, rezultă

$$\delta_s^n \left[\frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} A'(j, k, l) - \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} A(p, q, r) \right] B_r^{qn} = 0.$$

Deoarece B_r^{qn} este un tensor arbitrar, obţinem

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} A'(j, k, l) - \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} A(p, q, r) = 0.$$

Înmulțind interior cu $\frac{\partial x^q}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^r}$, rezultă

$$\delta_m^l \delta_l^n A'(j\ k, l) - \frac{\partial x^p}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial x'^m}\cdot\frac{\partial x'^n}{\partial x^r} A(p, q, r) = 0$$

sau

$$A'(j, m, n) = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial x'^m}\cdot\frac{\partial x'^n}{\partial x^r} A(p, q, r),$$

deci $A\ (p, q, r)$ sînt componentele unui tensor.

III.24. Dacă A_i sînt componentele unui vector covariant, să se arate că

$$B_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

sînt componentele unui tensor strîmb simetric covariant.

R. Prin schimbarea de variabile $x'^i = x'^i(x^1, \ldots, x^n)$, avem

$$B'_{ij} = \frac{\partial A'_j}{\partial x'^j} - \frac{\partial A'_j}{\partial x'^i} = \frac{\partial}{\partial x'^j}\left(A_h \frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\right) - \frac{\partial}{\partial x'^i}\left(A_h \frac{\partial x^h}{\partial x'^j}\right) =$$

$$= \frac{\partial A_h}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial x^h}{\partial x'^i} + \frac{\partial^2 x^h}{\partial x'^j \partial x'^i}\cdot A_h - \frac{\partial A_h}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^h}{\partial x'^j}\cdot\frac{\partial^2 x^h}{\partial x'^i \partial x'^j}\cdot A_h =$$

$$= \left(\frac{\partial A_h}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^h}\right)\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\cdot B_{hk}.$$

Tensorul de componente B_{ij} se numește *rotorul* vectorului de componente A_i.

III.25. Fie A^{pq}_{rst} componentele unui tensor. Să se arate:

1° dacă $p = t$, atunci A^{pq}_{rsp} determină un tensor. Care este ordinul său?

2° alegînd $p = t$ și $q = s$, să se arate că A^{pq}_{rpq} determină un tensor și să se determine ordinul său.

R. 1° Deoarece A^{pq}_{rst} sînt componentele unui tensor, rezultă

$$A'^{jk}_{lmn} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^r}{\partial x'^l}\frac{\partial x^s}{\partial x'^m}\frac{\partial x^t}{\partial x'^n} A^{pq}_{rst}. \tag{1}$$

Să arătăm că A^{pq}_{rsp} sînt componentele unui tensor. Punînd în (1) $n = j$ și însumînd după j, avem

$$A'^{jk}_{lmj} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} \frac{\partial x^s}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^j} A^{pq}_{rst} =$$

$$= \frac{\partial x^t}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} \frac{\partial x^s}{\partial x'^m} A^{pq}_{rst} = \delta^t_p \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial x'^m} A^{pq}_{rst} =$$

$$= \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} \frac{\partial x^s}{\partial x'^m} A^{pq}_{rsp},$$

deci A^{pq}_{rsp} sînt componentele unui tensor de ordinul 3 și poate fi notat cu B^q_{rs}. Procesul de a pune un indice contravariant egal cu un indice covariant într-un tensor și însumînd se numește *contracție*.

2° Făcînd în (1) $j = n$ și $k = m$ și sumînd după j și k, avem

$$A'^{jk}_{ikj} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^j} A^{pq}_{rst} =$$

$$= \frac{\partial x^t}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} A^{pq}_{rst} = \delta^t_p \delta^s_q \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} A^{pq}_{rst} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} A^{pq}_{rqp}.$$

Rezultă deci că A^{pq}_{rqp} sînt componentele unui tensor de ordinul întîi care pot fi notate cu C_r.

III.26. Să se exprime în notație matriceală ecuațiile de transformare pentru :

1° un vector covariant ;

2° un tensor contravariant de ordinul doi, presupunînd $N = 3$.

R. 1° Sistemul de ecuații $A'_p = \frac{\partial x^q}{\partial x'^p} A_q$ se poate scrie sub forma

$$\begin{Vmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Vmatrix}$$

sau

$$\|A'_1A'_2A'_3\| = \|A_1A_2A_3\| \cdot \begin{Vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{Vmatrix}$$

2° Ecuațiile $A'^{pr} = \frac{\partial x'^p}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} A^{qs}$ pot fi scrise sub forma

$$\begin{Vmatrix} A^{-11} & A^{-12} & A^{-13} \\ A^{-21} & A^{-22} & A^{-23} \\ A^{-31} & A^{-32} & A^{-33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{Vmatrix}$$

Rezultatul poate fi extins pentru $N > 3$.

III.27. Se consideră rețeaua din fig. III.27, *a* în care la timpul $t = 0$ curenții și sarcinile pe ramuri sînt nuli. Alegînd arbitrar sistemul de noduri reprezentat în fig. III. 27, *b*, să se determine matricea de conexiune

$$I^1 = I'^1 + I'^2 + I'^3, \qquad I^5 = -I'^1,$$
$$I^2 = I'^1 + I'^3 - I'^4, \qquad I^6 = I'^2,$$
$$I^3 = I'^3, \qquad I^7 = I'^4,$$
$$I^4 = I'^2 + I'^3, \qquad I^8 = I'^2$$

R. Avem numărul de subrețele $s = 2$, numărul de brațe $B = 3$, numărul de noduri $N = 5$, numărul maxim de perechi de noduri liniar independent $P = 3$ iar numărul maxim de ochiuri liniar independente $M = B - P = 5$.

Din (1) rezultă

$$\|C\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Astfel, tensiunile electromotoare între ochiuri sînt

$$\|E'\| = \|C\|'\|E\|$$

sau

$$E'^1 = E^1 + E^2 + E^3, \qquad E'^4 = -E^2 + E^7,$$
$$E'^2 = E^1 + E^4 + E^6, \qquad E'^5 = E^8.$$
$$E'^3 = E^1 + E^2 + E^3 + E^4,$$

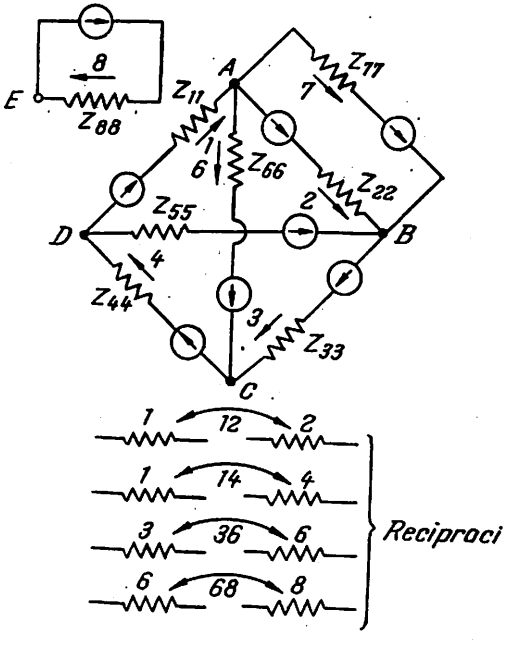


Fig. III.27, *a*

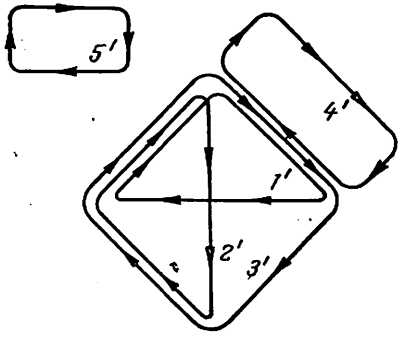


Fig. III.27, *b*

Matricea impedanţelor de linie se construieşte fără dificultate:

$$\|Z\| = \begin{Vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & 0 & Z_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{12} & Z_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & 0 & 0 & Z_{36} & 0 & 0 \\ Z_{14} & 0 & 0 & Z_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{36} & 0 & 0 & Z_{66} & 0 & Z_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{77} & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & Z_{68} & 0 & Z_{88} \end{Vmatrix}$$

Matricea impedanţelor de ochiuri va fi dată prin

$$\|Z'\| = \|C\|' \cdot \|Z\| \cdot \|C\|,$$

adică

$$\|Z'\| =$$

$$= \begin{vmatrix} Z_{11}+2Z_{12}+Z_{22}+Z_{55} & Z_{11}+Z_{12}+Z_{14} & Z_{11}+2Z_{12}+Z_{14}+Z_{22} & -(Z_{12}+Z_{22}) & 0 \\ Z_{11}+Z_{12}+Z_{14} & Z_{11}+2Z_{14}+Z_{44}+Z_{66} & Z_{11}+Z_{12}+2Z_{14}+Z_{33}+Z_{44} & -Z_{12} & Z_{68} \\ Z_{11}+2Z_{12}+Z_{14}+Z_{22} & Z_{11}+Z_{12}+2Z_{14}+Z_{36}+Z_{44} & Z_{11}+2Z_{12}+2Z_{14}+Z_{22}+Z_{32}+Z_{44} & -(Z_{12}+Z_{22}) & 0 \\ -(Z_{12}+Z_{22}) & -Z_{12} & -(Z_{12}+Z_{22}) & Z_{22}+Z_{77} & 0 \\ 0 & Z_{68} & 0 & 0 & Z_{88} \end{vmatrix}$$

III.28. Să se deducă legile de transformare pentru simbolurile lui Christoffel de prima și a doua speță.

R. Deoarece

$$g'_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} g_{pq},$$

rezultă

$$\frac{\partial g'_{jk}}{\partial x'^m} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} + \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial^2 x^q}{\partial x'^m \partial x'^k} g_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^m \partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} g_{pq}. \quad (1)$$

Prin permutări circulare ale indicilor j, k, m și p, q, r, obținem

$$\frac{\partial g'_{km}}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} + \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \partial x'^m} g_{qr} + \frac{\partial^2 x^q}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} g_{qr}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial g'_{mj}}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} + \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^k \partial x'^j} g_{rp} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^k \partial x'^m} \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} g_{rp}. \quad (3)$$

Scăzînd (1) din suma lui (2) și (3) și înmulțind cu $\frac{1}{2}$, obținem, utilizînd definiția simbolurilor lui Cristoffel de prima speță

$$\Gamma'_{jkm} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \Gamma_{pqr} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x^q}{\partial x'^m} g_{pq}. \quad (4)$$

Înmulțind (4) prin $g'^{nm} = \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x'^m}{\partial x^t} g^{st}$, obținem

$$g'^{nm}\Gamma'_{jkm} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x'^m}{\partial x^t} g^{st}\Gamma_{pqr} +$$

$$+ \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x^q}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \frac{\partial x'^m}{\partial x^t} g^{st} g_{pq}.$$

Rezultă

$$\Gamma'^{n}_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \cdot \delta^r_t g^{st} \Gamma_{pqr} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^j \partial x'^k} \cdot \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \delta^q_t \, g^{st} g_{pq} =$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \Gamma^s_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x'^n}{\partial x^p},$$

deoarece

$$\delta^r_t \, g^{st} \Gamma_{pqr} = g^{sr} \Gamma_{pqr} = \Gamma^s_{pq} \text{ și } \delta^q_t g^{st} g_{pq} = g^{sq} g_{pq} = \delta^s_p .$$

III.29. Să se calculeze simbolurile lui Christoffel de speţa a doua : 1° în sistemul de coordonate polare în plan definit prin ecuaţiile

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 \cos x^2 \\ x'^2 = x^2 \sin x^2 \end{cases}$$

2° în coordonate sferice.

R. 1° Avem

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^1}\right)^2 = (\cos x^2)^2 + (\sin x^2)^2 = 1,$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} + \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} = (\cos x^2)(-x^1 \sin x^2) + (\sin x^2)(x^1 \cos x^2) = 0$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'^2}{\partial x^2}\right)^2 = (-x^1 \sin x^2)^2 + (x^1 \cos x^2)^2 = (x^1)^2.$$

Deoarece sistemul de coordonate polare este ortogonal, avem $g_{ij} = \dfrac{1}{g^{ij}}$, deci

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{(x^1)^2}.$$

Aplicînd formula

$$\Gamma^j_{ik} = \frac{1}{2} g^{jl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l} \right), \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

obţinem

$$\Gamma^1_{1l} = \frac{1}{2} g^{1l} \left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{l1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^l} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) = 0, \quad (l = 1, 2).$$

Analog

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^1_{22} = -x^1, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{x^1}.$$

Se obţineau aceleaşi rezultate utilizînd formula

$$\Gamma^j_{ik} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^i \partial x^k}, \quad \alpha, i, j, k = 1, 2,$$

(Coordonatele x^α sînt rectilinii).

2° În coordonate sferice avem

$$\left.\begin{aligned} x'^1 &= x^1 \cos x^2 \sin x^3 \\ x'^2 &= x^1 \sin x^2 \sin x^3 \\ x'^3 &= x^1 \cos x^3. \end{aligned}\right\}, \quad (x^1 = r, \ x^2 = \theta, \ x^3 = \varphi).$$

Avem

$$g_{11} = 1, \ g_{22} = r^2, \ g_{33} = r^2 \sin^2 \theta \quad \text{şi} \quad g_{jk} = 0 \text{ pentru } j \neq k.$$

Printr-un calcul analog se obţin

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (r^2)}{\partial r} = -r; \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2r^2} \frac{\partial (r^2)}{\partial r} = \frac{1}{r};$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2g_{11}} \cdot \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -r \sin^2 \theta; \qquad \Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\sin \theta \cdot \cos \theta;$$

$$\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2g_{33}} \cdot \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{r}; \qquad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \frac{1}{2g_{33}} \cdot \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \operatorname{cotg} \theta.$$

III.30. Să se demonstreze:

1° $$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} = \Gamma_{pmq} + \Gamma_{qmp};$$

2° $$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m} = -g^{pn}\Gamma^q_{mn} - g^{qn}\Gamma^p_{mn};$$

3° $$\Gamma^p_{pq} = \frac{\partial}{\partial x^q} (\ln \sqrt{g}), \text{ unde } g = \det \|g_{jk}\|.$$

R. 1° Avem

$$\Gamma_{pmq} + \Gamma_{qmp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{qm}}{\partial x^p} \right) = \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m};$$

2° $\frac{\partial}{\partial x^m}(g^{jk}g_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x^m}(\delta_i^k) = 0$. Atunci

$$g^{jk}\cdot\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}g_{ij} = 0 \text{ sau } g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}.$$

Înmulţind cu g^{ir}, obţinem

$$g^{ir}g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{ir}g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m},$$

adică

$$\delta_j^r\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m} = -g^{ir}g^{jk}(\Gamma_{imj} + \Gamma_{jmi})$$

sau

$$\frac{\partial g^{rk}}{\partial x^m} = -g^{ir}\Gamma_{im}^k - g^{jk}\Gamma_{jm}^r.$$

Înlocuind r, k, i, j prin p, q, n, m, se obţine relaţia de la 2°.

3° Scriem $g = g_{jk}G(j, k)$ unde $G(j, k)$ este complementul algebric al elementului g_{jk} din determinantul g. Deoarece $G(j, k)$ nu conţine explicit g_{jk}, avem $\frac{\partial g}{\partial g_{jr}} = G(j, r)$. Însumînd după j şi r

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = \frac{\partial g}{\partial g_{jr}}\cdot\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = G(j, r)\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} = g\cdot g^{jr}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m} =$$

$$= g\cdot g^{jr}(\Gamma_{jmr} + \Gamma_{rmj}) = g(\Gamma_{jm}^j + \Gamma_{rm}^r) = 2g\Gamma_{jm}^j.$$

Deci

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m} = \Gamma_{jm}^j \text{ sau } \Gamma_{jm}^j = \frac{\partial}{\partial x^m}(\ln\sqrt{g}).$$

Înlocuind j prin p şi m prin q, avem rezultatul direct.

III.31. Dacă A_p şi A^p sînt componentele a doi vectori, să se arate că derivatele lor covariante în raport cu x^q.

1° $$A_{p,q} \equiv \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma_{pq}^s A_s,$$

2° $$A_{p,q} \equiv \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma_{qs}^p A^s$$

sînt tensori.

R. 1° Deoarece

$$A'_j = \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} A_r,$$

$$\frac{\partial A'_j}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial x^t} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \partial x'^k} A_r. \tag{1}$$

Avem

$$\Gamma'^n_{jk} = \frac{\partial x^t}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x'^n}{\partial x^s} \Gamma^s_{tl} + \frac{\partial^2 x^t}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{\partial x'^n}{\partial x^t}.$$

Înmulţind această relaţie cu $\frac{\partial x^r}{\partial x'^n}$, rezultă

$$\Gamma'^n_{jk} \frac{\partial x^r}{\partial x'^n} = \frac{\partial x^t}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \delta^r_s \Gamma^s_{tl} + \frac{\partial^2 x^t}{\partial x'^j \partial x'^k} \delta^r_t$$

deci

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \partial x'^k} = \Gamma'^n_{jk} \frac{\partial x^r}{\partial x'^n} - \frac{\partial x^t}{\partial x'^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \Gamma^r_{tl}.$$

Înlocuind în (1), obţinem

$$\frac{\partial A'_j}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial x^t} + \Gamma'^n_{jk} \frac{\partial x^r}{\partial x'^n} A_r - \frac{\partial x^t}{\partial x'^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \Gamma^r_{tl} A_r =$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \Gamma'^n_{jk} A'_n - \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \Gamma^s_{pq} A_s$$

sau

$$\frac{\partial A'_j}{\partial x'^k} - \Gamma'^n_{jk} A'_n = \frac{\partial x^p}{\partial x'^j} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^s_{pq} A_s \right).$$

Rezultă că $\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^s_{pq} \cdot A_s$ sînt componentele unui tensor covariant de ordinul doi.

2° Avem

$$A'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^r} A^r.$$

Rezultă

$$\frac{\partial A'^j}{\partial x'^k} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial A^r}{\partial x^t} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^r \partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} A^r. \tag{2}$$

Înlocuind aici

$$\frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^r \partial x^t} = \Gamma^n_{rt} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial x'^l}{\partial x^t} \Gamma'^j_{il},$$

obținem

$$\frac{\partial A'^j}{\partial x'^k} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} \frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \Gamma^n_{rt} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} A^r - \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial x'^l}{\partial x^t} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} \Gamma'^j_{il} A' =$$

$$= \frac{\partial x'^j}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} \frac{\partial A^r}{\partial x^t} + \Gamma^n_{rt} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} A^r - \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \delta^l_k \Gamma'^j_{il} A^r =$$

$$= \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma^p_{sq} \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} A^s - \Gamma'^j_{ik} A^i$$

sau

$$\frac{\partial A'^j}{\partial x'^k} + \Gamma'^j_{ki} A'^i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} \left(\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma^p_{qs} A^s \right).$$

Rezultă deci că $\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma^p_{qs} A^s$ sînt componentele unui tensor mixt de ordinul doi

III.32. Să se calculeze derivata covariantă a lui $A^j_k B^{lm}_n$ în raport cu χ^q.

R. Avem

$$(A^j_k B^{lm}_n)_{,q} = \frac{\partial (A^j_k B^{lm}_n)}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq} A^j_s B^{lm}_n - \Gamma^s_{nq} A^j_k B^{lm}_s +$$

$$+ \Gamma^j_{qs} A^s_k B^{lm}_n + \Gamma^l_{qs} A^j_k B^{sm}_n + \Gamma^m_{qs} A^j_k B^{ls}_n =$$

$$= \left(\frac{\partial A^j_k}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq} A^j_s + \Gamma^j_{qs} A^s_k \right) B^{lm}_n + A^j_k \left(\frac{\partial B^{lm}_n}{\partial x^q} - \Gamma^s_{nq} B^{lm}_s + \Gamma^l_{qs} B^{sm}_n + \Gamma^m_{qs} B^{ls}_n \right) =$$

$$= A^j_{k,q} B^{lm}_n + A^j_k B^{lm}_{n,q}.$$

III.33. Să se demonstreze :

$$1^\circ \ \operatorname{div} A^p = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} A^k),$$

$$2^\circ \ \Delta \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$$

și să se scrie expresiile lor în coordonate cilindrice și sferice.

R. 1° Divergenţa lui A^p se obţine prin contracţia derivatei covariante a lui A^p, adică contracţia lui $A^p_{,p}$. Avem deci

$$\operatorname{div} A^p = A^p_{,p} = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \Gamma^p_{pk} A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{g}\right) A^k =$$

$$= \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k}\right) A^k + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} A^k). \tag{1}$$

În coordonate cilindrice $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$,

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2 \text{ şi } \sqrt{g} = \rho.$$

Notînd componentele fizice cu A_ρ, A_φ, A_z, avem

$$A_\rho = \sqrt{g_{11}} A^1 = A^1,\ A_\varphi = \sqrt{g_{22}} A^2 = \rho A^2,\ A_z = \sqrt{g_{33}} A^3 = A^3,$$

deci din (1) rezultă

$$\operatorname{div} A^p = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\rho}{\rho z} (\rho A_z)\right].$$

În coordonate sferice $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$,

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = r^4 \sin^2 \theta \text{ şi } \sqrt{g} = r^2 \sin \theta;$$

$$A_r = \sqrt{g_{11}} A^1 = A^1,\ A_\theta = \sqrt{g_{22}} A^2 = rA^2,\ A_\varphi = \sqrt{g_{33}} A^3 = r \sin \theta A^3,$$

deci

$$\operatorname{div} A^p = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (rA_\varphi)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

2° Cantităţile grad $\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^r}$ sînt componentele unui vector covariant. Definit ca derivata covariantă a lui Φ scriem $\Phi_{,r}$. Vectorul covariant asociat cu $\Phi_{,r}$ are componentele $A^k = g^{kr} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^r}$.

Utilizînd rezultatul de la punctul 1°, avem

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \left(g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g}\, g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r}\right).$$

În coordonate cilindrice $g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{\rho^2}, g^{33} = 1$, deci

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\rho^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

În coordonate sferice $g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{r^2}, g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}$, deci

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},$$

III.34. Să se calculeze derivatele intrinseci ale tensorilor consideraţi ca funcţii diferenţiabile de t:
1° Invariantul Φ; 2° A^j; 3° A^j_k; 4° A^{jk}_{lmn}.

R. 1°
$$\frac{\delta\Phi}{\delta t} = \Phi_{,q}\frac{dx^q}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^q}\frac{dx^q}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$$

2°
$$\frac{\delta A^j}{\delta t} = A^j_{,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^q} + \Gamma^j_{qs}A^s\right)\frac{dx^q}{dt} = \frac{\partial A^j}{dx^q}\frac{dx^q}{dt} +$$

$$+ \Gamma^j_{qs}A^s\frac{dx^q}{dt} = \frac{dA^j}{dt} + \Gamma^j_{qs}A^s\frac{dx^q}{dt}$$

3°
$$\frac{\delta A^j_k}{\delta t} = A^j_{k,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^j_k}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq}A^j_s + \Gamma^j_{qs}A^s_k\right)\frac{dx^q}{dt} =$$

$$= \frac{dA^j_k}{dt} - \Gamma^s_{kq}A^j_s\frac{dx^q}{dt} + \Gamma^j_{qs}A^s_k\frac{dx^q}{dt}.$$

4°
$$\frac{\delta A^{jk}_{lmn}}{\delta t} = A^{jk}_{lmn,q}\frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A^{jk}_{lmn}}{\partial x^q} - \Gamma^s_{lq}A^{jk}_{smn} - \Gamma^s_{mq}A^{jk}_{lsn} -\right.$$

$$\left. - \Gamma^s_{nq}A^{jk}_{lms} + \Gamma^j_{qs}A^{sk}_{lmn} + \Gamma^k_{qs}A^{js}_{lmn}\right)\frac{dx^q}{dt} =$$

$$= \frac{dA^{jk}_{lmn}}{dt} - \Gamma^s_{lq}A^{jk}_{smn}\frac{dx^q}{dt} - \Gamma^s_{mq}A^{jk}_{lsn}\frac{dx^q}{dt} - \Gamma^s_{nq}A^{jk}_{lms}\frac{dx^q}{dt} +$$

$$+ \Gamma^j_{qs}A^{sk}_{lmn}\frac{dx^q}{dt} + \Gamma^k_{qs}A^{js}_{lmn}\frac{dx^q}{dt}.$$

III.35. Să se arate că:

1° $A_{p,qr} - A_{p,rq} = R^n_{pqr}A_n$, A_n fiind un tensor covariant arbitrar de ordinul întîi, şi să se arate că R^n_{pqr} este tensor.

2° $R_{pqrs} = g_{ns}R^n_{pqr}$ este tensor.

R. 1°
$$A_{p,qr} = (A_{p,q})_{,r} = \frac{\partial A_{p,q}}{\partial x^r} - \Gamma^j_{pr}A_{j,q} - \Gamma^j_{qr}A_{p,j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma_{pq}A_j\right) - \Gamma^j_{pr}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^q} - \Gamma^k_{jq}A_k\right) - \Gamma^j_{qr}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^j} - \Gamma^l_{pj}A_l\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 A_p}{\partial x^r \partial x^q} - \frac{\partial \Gamma^j_{pq}}{\partial x^r}A_j - \Gamma^j_{pq}\frac{\partial A_j}{\partial x^q} + \Gamma^j_{pr}\Gamma^k_{jq}A_k - \Gamma^j_{qr}\frac{\partial A_p}{\partial x^j} + \Gamma^j_{qr}\Gamma^l_{pj}A_l.$$

$$A_{p,qr} - A_{p,rq} = \Gamma^j_{pr}\Gamma^k_{jq}A_k - \frac{\partial \Gamma^j_{pq}}{\partial x^r}A_j - \Gamma^j_{pq}\Gamma^k_{jr}A_k + \frac{\partial \Gamma^j_{pr}}{\partial x^q}A_j =$$

$$= \Gamma^k_{pr}\Gamma^j_{kq}A_j - \frac{\partial \Gamma^j_{pq}}{\partial x^r}A_j - \Gamma^k_{pq}\Gamma^j_{kr}A_j + \frac{\partial \Gamma^j_{pr}}{\partial x^q}A_j = R^j_{pqr}A_j,$$

unde

$$R^j_{pqr} = \Gamma^k_{pr}\Gamma^j_{kq} - \frac{\partial \Gamma^j_{pq}}{\partial x^r} - \Gamma^k_{pq}\Gamma^j_{kr} + \frac{\partial \Gamma^j_{pr}}{\partial x^q}.$$

Înlocuind j cu n, obţinem rezultatul dorit.

Deoarece $A_{p,qr} - A_{p,rq}$ este un tensor, $R^n_{pqr}A_n$ este un tensor; şi deoarece A_n este un tensor arbitrar, R^n_{pqr} este un tensor fiind cîtul a doi tensori. Acest tensor se numeşte *tensorul Riemann-Christoffel* şi se mai poate scrie $R^{\cdot n}_{\cdot pqr}$, $R^{\cdots n}_{pqr\cdot}$, sau simplu R^n_{pqr}.

2° $R_{pqrs} = g_{ns}R^n_{pqr}$ este tensorul asociat lui R^n_{pqr}, deci este un tensor. El se numeşte *tensorul de curbură covariant* şi este de importanţă fundamentală în teoria generală a relativităţii a lui Einstein.

III.36. Dacă energia cinetică T a unei particule de masă constantă M care se mişcă cu o viteză v este $T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mg_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q$, să se demonstreze că

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = Ma_k,$$

unde a_k sînt componentele covariante ale acceleraţiei.

R. Avem

$$\frac{\partial T}{\partial x^k} = \frac{1}{2}M\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} Mg_{kq}\dot{x}^q$$

şi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) = M\left(g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q\right).$$

Rezultă

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} = M\left(g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^j}\dot{x}^j\dot{x}^q - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q\right) =$$

$$= M\left[g_{kq}\ddot{x}^q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kq}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{kp}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^p\dot{x}^q\right] =$$

$$= M(g_{kq}\ddot{x}^q + \Gamma_{pqk}\dot{x}^p\dot{x}^q) = Mg_{kr}(\ddot{x}^r + \Gamma^r_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q) = Mg_{kr}a^r = Ma_k,$$

deoarece

$$a^r = \frac{\delta v^r}{\delta t} = \frac{d^2x^r}{dt^2} + \Gamma^r_{pq}\frac{dx^p}{dt}\cdot\frac{dx^q}{dt}.$$

În cazul în care forța $F_k = Ma_k$ derivă dintr-un

$$F_k = -\frac{\partial V}{\partial x^k},$$

funcția V reprezentînd energia potențială a particulei, ecuația lui Lagrange ia forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^k} + \frac{\partial V}{\partial x^k} = 0.$$

III.37. O masă punctuală m este supusă la o mișcare fără frecare de suprafața unui tor. Să se calculeze energia sa cinetică și ecuațiile diferențiale de mișcare, dacă ea este supusă unei singure forțe, forța gravitațională g, acționînd paralel cu axa torului (axa Ox^3, fig. III. 37).

R. Să considerăm coordonatele torice definite prin ecuațiile

$$\bar{x}^1 = (a + x^1\cos x^2)\cos x^3,$$

$$\bar{x}^2 = (a + x^1\cos x^2)\sin x^3,$$

$$\bar{x}^3 = x^1\sin x^2.$$

Se calculează ușor

$g_{11} = 1$; $g_{22} = (x^1)^2$, $g_{33} = (a + x^1\cos x^2)^2$, $g_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$ deoarece aceste coordonate sînt ortogonale.

Fie o metrică definită prin

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (a + x^1\cos x^2)^2(dx^3)^2.$$

Dacă impunem particulei să se miște pe torul $x^1 = b$, trecem de la spațiul euclidian cu 3 dimensiuni la un spațiu cu două dimensiuni constituit din suprafața torului; acest spațiu este riemannian și are metrica

$$ds^2 = (b)^2(dx^2)^2 + (a + b\cos x^2)^2(dx^3)^2,$$

iar tensorul metric fundamental este

$$G_{22} = (b)^2,\ G_{33} = (a + b\cos x^2)^2,\ G_{23} = G_{32} = 0.$$

Energia cinetică a particulei este

$$T = \frac{1}{2} m G_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \qquad (i, j = 2, 3)$$

$$= \frac{1}{2} m(b)^2 (\dot{x}^2)^2 + \frac{1}{2} m(a + b \cos x^2)^2 (\dot{x}^3)^2.$$

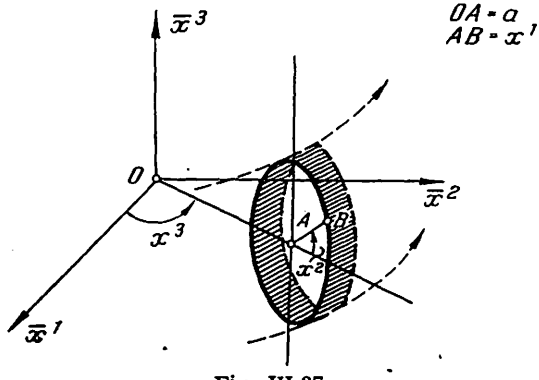


Fig. III.37.

Forța aplicată derivă dintr-un potențial:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = -mg,$$

adică

$$V = mg\bar{x}^3 = mgb \sin x^2.$$

Avem

$$\frac{\partial V}{\partial x^2} = mgb \cos x^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^2} = m(b)^2 \dot{x}^2, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^2}\right) = m(b)^2 \ddot{x}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x^2} = -mb(a + b \cos x^2) \sin x^2 \cdot (\dot{x}^3)^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^3} = m(a + b \cos x^2)^2 \dot{x}^3,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^3}\right) = m(a + b \cos x^2)^2 \ddot{x}^3 - 2mb(a + b \cos x^2) \sin x^2 (\dot{x}^2 \dot{x}^3),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x^3} = 0.$$

Ecuațiile diferențiale vor fi

$$b\ddot{x}^2(a + b\cos x^2)\sin x^2\cdot(\dot{x}^3)^2 + g\cos x^2 = 0,$$

$$(a + b\cos x^2)\,\ddot{x}^3 - 2b(a + b)\cos x^2)\sin x^2\cdot(\dot{x}^2\dot{x}^3) = 0.$$

III.38. Fie o bară omogenă de masă m și moment de inerție I în raport cu centrul său de greutate (fig. III.38), axele de inerție sînt perpendiculare în G în planul figurii). Presupunînd că bara este supusă unei mișcări în planul xOy, să se determine ecuațiile de mișcare a barei, calculînd întîi energia sa cinetică.

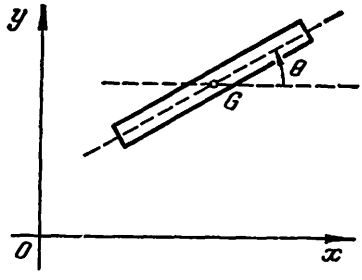


Fig. III.38

R. Energia cinetică a barei rezultă imediat din teorema lui König

$$T = \frac{1}{2}\,[m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + I\dot{\theta}^2]$$

sau cu notația

$$q^1 = x,\ M_{11} = m,$$

$$q^2 = y,\ M_{22} = m,\ M_{ij} = 0 \text{ pentru } i \neq j,$$

$$q^3 = \theta,\ M_{33} = I,$$

$$T = \frac{1}{2}\,M_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j, \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Acestui sistem dinamic îi asociem spațiul lui riemann cu metrica

$$ds^2 = M_{ij}\,dq^i dq^j, \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Fiind dați coeficienții de inerție constanți, acest spațiu riemannian este euclidian. Presupunem că bara este supusă unui cîmp de gravitație uniform, orientat după Oy. Fie

$$F_1 = 0,\ F_2 = -\,mg$$

componentele forței de gravitație acționînd asupra barei. Această forță derivă dintr-un potențial

$$V = mgq^2.$$

În acest caz sistemul de ecuații

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

devine

$$a)\ \frac{\partial T}{\partial q^1} = M_{1j}\dot{q}^j = M_{11}\dot{q}^1 = m\dot{q}^1,$$

deci

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^1}\right) = m\ddot{q}^1, \qquad \frac{\partial T}{\partial q^1} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q^1} = 0. \tag{1}$$

$$b)\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^2} = M_{2j}\dot{q}^j = M_{22}\dot{q}^2 = m\dot{q}^2,$$

deci

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^2}\right) = m\ddot{q}^2, \qquad \frac{\partial T}{\partial q^2} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q^2} = mg, \tag{2}$$

$$c)\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^3} = M_{3j}\dot{q}^j = M_{33}\dot{q}^3 = I\dot{q}^3,$$

de unde rezultă

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^3}\right) = I\ddot{q}^3, \qquad \frac{\partial T}{\partial q^3} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q^2} = 0$$

Ecuațiile diferențiale de mișcare se scriu

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{q}^1 &= 0 \\ m\ddot{q}^2 &= -mg \\ I\ddot{q}^3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

III.39. Un cerc de rază r și de centru O materializat printr-un fir de masă m se rotește în jurul unei axe diametrale reprezentate prin axa Ox^3 (fig. III.39). Pe această circumferință poate aluneca fără frecare o masă punctuală M. Să se calculeze energia cinetică a sistemului și ecuațiile de mișcare a masei M. Ansamblul este presupus supus unui cîmp gravitic terestru dirijat după Ox^3.

R. Alegem coordonatele generalizate, unghiurile q^1 și q^2, ceea ce revine la situarea lui M în coordonate sferice.

Energia cinetică a circumferinței este

$$\frac{m}{4}(r)^2(\dot{q}^1)^2$$

iar a masei punctuale M

$$\frac{M}{2}(r\cos q^2)^2(\dot{q}^1)^2 + \frac{M}{2}(r)^2(\dot{q}^2)^2.$$

Energia cinetică totală este

$$T = \left[\frac{m}{4} + \frac{M}{2}(\cos q^2)^2\right](r)^2(\dot{q}^1)^2 + \frac{}{2}(r)^2(\dot{q}^2)^2.$$

Spaţiul de configuraţie are metrica

$$ds^2 = G_{ij}\,dq^i dq^j \quad (i, j = 1, 2)$$

cu

$$G_{11} = \frac{1}{2}(r)^2\left[\frac{m}{2} + M(\cos q^2)^2\right],$$

$$G_{22} = \frac{1}{2}M(r)^2, \qquad G_{12} = G_{21} = 0.$$

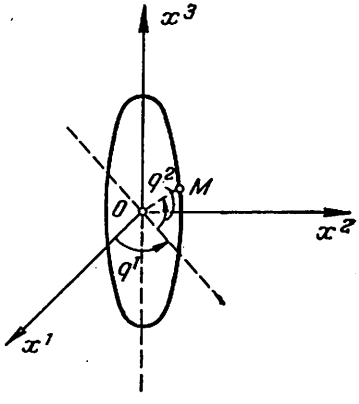


Fig. III.39

Acest spaţiu nu este euclidian.

Ecuaţiile lui Lagrange se stabilesc uşor. Presupunem că nu se aplică nici o forţă exterioară. Atunci

$$\left[\frac{m}{2} + M(\cos q^2)^2\right]\ddot{q}^1 - 2M\sin q^2\cos q^2\cdot\dot{q}^1\cdot\dot{q}^2 = 0,$$

$$\ddot{q}^2 + \sin q^2\cdot\cos q^2(\dot{q}^1) = \frac{g}{r}\cos q^2.$$

III.40. Să se determine condiţia necesară ca $I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x})\,dt$ să admită un extremum.

R. Fie $x = X(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, curba care realizează un extremum pentru I. Atunci $x = X(t) + \varepsilon\eta(t)$, unde ε este independent de t, este o vecinătate pentru t_1 şi t_2 astfel că $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Valoarea lui I pentru această vecinătate este

$$I(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x + \varepsilon\eta, \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta})\,dt.$$

Aceasta este un extremum pentru $\varepsilon > 0$. O condiţie necesară este deci $\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$.

Avem

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}\right)dt = 0$$

care se mai scrie

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x} \eta \, dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \eta \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right] dt = 0.$$

Deoarece η este arbitrar,

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0.$$

Acest rezultat se extinde simplu la

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t, x^1, \dot{x}^1, x^2, \dot{x}^2, \ldots, x^N, \dot{x}^N) \, dt$$

obținîndu-se sistemul de ecuații

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}\right) = 0$$

numit *sistemul lui Euler-Lagrange.*

III.41. Să se determine liniile geodezice ale suprafeței a cărei metrică

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad (y > 0).$$

R. Ecuațiile lui Lagrange sînt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial T}{\partial y}, \tag{1}$$

unde

$$T = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2y^2}, \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right).$$

Cu aceasta ecuațiile (1) se scriu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{y^2}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{y^2}\right) = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3}. \tag{2}$$

Integrînd prima ecuație (2) obținem

$$\frac{\dot{x}}{y^2} = k, \quad (k = \text{const.})$$

Dacă $k = 0$, atunci $x = \text{const}$, deci liniile geodezice sînt paralele la axa Oy. Dacă $k \neq 0$, atunci $\frac{dx}{dt} = \frac{k}{y^2}$ iar ecuația a doua (2) devine

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

care integrată ne dă

$$y\frac{dy}{dx}+x=C, \quad (C=\text{const}).$$

Integrînd această ecuație, obținem

$$y^2+(x-C)^2=r^2, \quad (r=\text{const}).$$

Deci, liniile geodezice formează o familie de cercuri.

III.42. Să se arate că geodezicele în spațiul Riemann sînt date de ecuația

$$\frac{d^2x^r}{ds^2}+\Gamma^r_{pq}\frac{dx^p}{ds}\cdot\frac{dx^q}{ds}=0.$$

R. Vom determina un extremum pentru $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}\,dt$, utilizînd ecuațiile Euler-Lagrange cu $F=\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}$. Avem

$$\frac{\partial F}{\partial x^k}=\frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q, \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k}=\frac{1}{2}(g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q)^{-\frac{1}{2}}2g_{pk}\dot{x}^p.$$

Dar pentru $ds=\sqrt{g_{pq}\dot{x}^p\dot{x}^q}\,dt$, ecuațiile Euler se scriu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{pk}\dot{x}^p}{\dot{s}}\right)-\frac{1}{2\dot{s}}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q=0$$

sau

$$g_{pk}\ddot{x}^p+\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k}\dot{x}^p\dot{x}^q=\frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}.$$

Scriind

$$\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}\dot{x}^p\dot{x}^q=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q}+\frac{\partial g_{qk}}{\partial x^p}\right)\dot{x}^p\dot{x}^q,$$

ecuațiile devin

$$g_{pk}\ddot{x}^p+\Gamma_{pqk}\dot{x}^p\dot{x}^q=\frac{g_{pk}\dot{x}^p\ddot{s}}{\dot{s}}.$$

Dacă utilizăm lungimea arcului ca parametru $\dot{s}=1$, $\ddot{s}=0$ și ecuațiile sînt

$$g_{pk}\frac{d^2x^p}{ds^2}+\Gamma_{pqk}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds}=0.$$

Înmulțind cu g^{rk}, obținem

$$\frac{d^2x^r}{ds^2}+\Gamma^r_{pq}\frac{dx^p}{ds}\cdot\frac{dx^q}{ds}=0.$$

Capitolul IV

SERII FOURIER. INTEGRALA FOURIER

Definiţie. *O serie de forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x\right), \tag{1}$$

unde a_0, a_k, $b_k (k = 1, 2, \ldots)$ *sînt numere reale,* x *este variabilă reală iar* l *este un număr real pozitiv, se numeşte serie trigonometrică de perioadă* $2l$.

Proprietăţile seriilor de funcţii rămîn adevărate şi pentru seriile trigonometrice. În plus avem următoarele proprietăţi :

Teorema 1. *Dacă seria* (1) *este convergentă* (*uniform convergentă sau absolut convergentă*) *pe un interval compact oarecare de lungime* $2l$, *atunci ea este convergentă* (*uniform convergentă sau absolut convergentă*) *pe toată mulţimea* R *a numerelor reale, iar suma ei este o funcţie periodică de perioadă* $2l$.

Teorema 2. *Dacă şirurile* (a_n) şi (b_n) *formate cu coeficienţii seriei* (1) *sînt monotone şi converg la zero, atunci seria este convergentă pentru orice* $x \neq 2kl$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *şi uniform convergentă în orice interval compact care nu conţine puncte de această formă.*

Teorema 3. *Dacă seria* (1) *converge uniform către funcţia* $f(x)$ *pe intervalul* $[-l, l]$, *atunci coeficienţii ei sînt daţi de formulele :*

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x \mathrm{d}x, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \mathrm{d}x, \quad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{2}$$

Definiție. Fie $f(x)$ *o funcție periodică de perioadă* $2l$ *integrabilă, pentru care avem*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right).$$

seria putînd fi integrată termen cu termen pe $[\alpha, \alpha + 2l]$. *Numerele* a_k *și* b_k *date de* (2) *cu integralele luate de la* α *la* $\alpha + 2l$ *se numesc coeficienții Fourier ai funcției* f, *iar seria trigonometrică de perioadă* $2l$ *formată cu acești coeficienți se numește seria Fourier asociată funcției* f.

Funcția f este dezvoltabilă în serie Fourier pe mulțimea $A \subseteq R$, dacă seria Fourier asociată converge pe această mulțime către f.

Convergența seriilor Fourier și posibilitatea dezvoltării funcțiilor în serie Fourier se studiază cu ajutorul următoarelor criterii.

Criteriul 1. (Dirichlet). *Dacă funcția* f *periodică de perioadă* T *este monotonă pe porțiuni pe un interval* $[\alpha, \alpha + T]$ *și are în acest interval un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speță, atunci seria Fourier a ei converge în fiecare punct* $x_0 \in [\alpha, \alpha + T]$ *către*

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Criteriul 2. *Dacă funcția* f *este derivabilă sau derivabilă pe porțiuni în intervalul* $[\alpha, \alpha + T]$, *atunci seria Fourier asociată funcției* f *converge către* $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ *în orice punct* $x_0 \in [\alpha, \alpha + T]$.

Teorema 4. *Dacă funcția* $f(x)$ *periodică de perioadă* T *este pară seria sa Fourier este*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

cu coeficienții

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos k\omega x \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Seria Fourier a unei funcții impare $f(x)$ *este*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega x,$$

cu coeficienţii

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin k\omega x\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Fie $f(t)$ o funcţie reală sau complexă, periodică de perioadă, T integrabilă pe intervalul $[\alpha, \alpha + T]$.

Forma complexă a seriei Fourier a funcţiei $f(t)$ este

$$\sum_{n=\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t},\quad c_n = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(\tau)e^{in\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{5}$$

Teorema 5. *Fie $f(x)$ o funcţie reală sau complexă care satisface condiţiile lui Dirichlet (criteriul 1) în orice interval de lungime finită; în fiecare punct de discontinuitate x_0 valoarea funcţiei este $f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ şi fie funcţia integrabilă pe intervalul $(-\infty, +\infty)$. În aceste condiţii există egalitatea*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-u(x-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

numită integrala Fourier a funcţiei $f(x)$.

Forma *reală* a integralei Fourier este

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos u(x-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

Dacă $f(x)$ este o funcţie pară, formula (7) se reduce la

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos ux\,\mathrm{d}u\int_0^{\infty} f(\tau)\cos u\tau\,\mathrm{d}\tau, \tag{8}$$

iar dacă $f(x)$ este o funcţie impară, avem

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin ux\,\mathrm{d}u\int_0^{\infty} f(\tau)\sin u\tau\,\mathrm{d}\tau. \tag{9}$$

Definiţie. *Numim transformata Fourier a funcţiei reale sau complexe* $f(x) \in \mathcal{L}^1(-\infty, +\infty)$* *funcţia*

$$\varphi(\alpha) = \varphi_f(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} f(t)\, dt = Tf. \tag{10}$$

Funcţia $\varphi(\alpha)$ *există pentru orice* α *real pentru că* $|e^{i\alpha t}| = 1$.

Avem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha. \tag{11}$$

Teorema 6. *Dacă* $f, g \in \mathcal{L}^1(-\infty, +\infty)$, *atunci există* h *pentru aproape orice* x *real,* $h \in \mathcal{L}^1(-\infty, +\infty)$ *cu*

$$\chi(\alpha) = \varphi(\alpha) \cdot \psi(\alpha), \tag{12}$$

unde $\varphi(\alpha) = Tf$, $\psi(\alpha) = Tg$, $\chi(\alpha) = Th$ şi

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy.$$

Pentru funcţii *pare* relaţiile (10) şi (12) devin

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos \alpha x\, d\alpha, \tag{13}$$

iar pentru funcţii *impare*

$$\varphi(\alpha) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x\, dx, \quad f(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \sin \alpha x\, d\alpha. \tag{14}$$

PROBLEME

IV.1. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{dacă } -\pi < x \leqslant 0, \\ bx, & \text{dacă } 0 \leqslant x < \pi, \end{cases}$$

unde a şi b sînt constante în intervalul $(-\pi, \pi)$.

* Clasa de funcţii $\mathcal{L}^1(\alpha, \beta)$ este clasa funcţiilor integrabile pe intervalul (α, β).

R. Această funcție verifică, în mod evident, condițiile din criteriul lui Dirichlet pe intervalul $(-\pi, \pi)$, deci este dezvoltabilă în serie Fourier pe acest interval.
Avem

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} ax \quad x + \int_{0}^{\pi} bx \, dx\right] = \frac{\pi}{4}(b - a),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} ax \cos nx \, dx + \int_{0}^{\pi} bx \cos nx \, dx\right] =$$

$$= \frac{a}{\pi}\left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{b}{\pi}\left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi} = \frac{b - a}{\pi n^2}\,[(-1)^n - 1]$$

sau

$$a_n = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n = 2k, \\ \dfrac{2(a - b)}{\pi(2k+1)^2}, \text{ dacă } n = 2k + 1, \end{cases}$$

și

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[a\int_{-\pi}^{0} x \sin nx \, dx + b\int_{0}^{\pi} x \sin nx \, dx\right] =$$

$$= \frac{a}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{b}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n} - \frac{x \cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(a + b).$$

Rezultă

$$f(x) = \frac{\pi}{4}(b - a) + \frac{2}{\pi}(a - b)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + (a + b)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k^2}.$$

IV.2. Să se dezvolte în serie Fourier funcțiile

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, \text{ pentru } 0 < x \leqslant \pi, \\ -f(-x), \text{ pentru } -\pi \leqslant x < 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{x}{2}, \text{ pentru } -\pi < x < \pi,$$

și să se deducă dezvoltarea în serie trigonometrică a numărului $\frac{\pi}{4}$.

R. Funcția $f(x)$ este o funcție periodică de perioadă 2π, impară, avînd puncte de discontinuitate de prima speță (fig. IV.2, *a*). În intervalul de la $-\pi$ la π funcția are $x = 0$ punct de discontinuitate. În acest punct seria converge către zero:

$$f(0) = \frac{f(0-) + f(0+)}{2} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

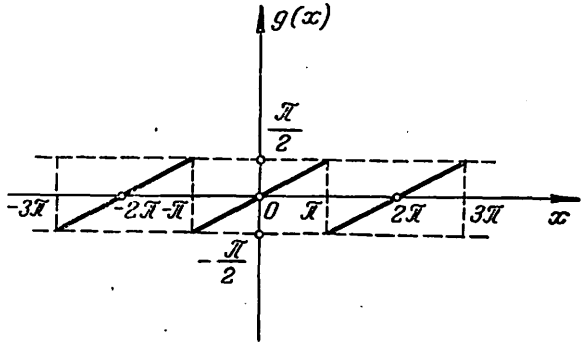


Fig. VI. 2, *a*

Coeficienții seriei sînt

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\omega x\, dx.$$

Avem $T = 2\pi$, deci

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx\, dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\, dx\right] = \frac{1}{n}.$$

Rezultă

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

sau

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}. \qquad (1)$$

Funcția $g(x)$ este o funcție periodică de perioadă 2π, impară avînd puncte de discontinuitate de prima speță (fig. IV. 2, *b*). Avem pentru $-\pi$ și π valorile

$$g(-\pi) = \frac{g(-\pi-0)+g(-\pi+0)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{2} = 0,$$

$$g(\pi) = \frac{g(\pi-0)+g(\pi+0)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

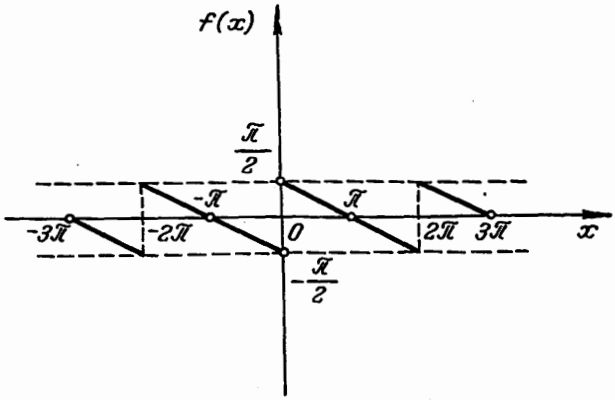


Fig. VI. 2, *b*

Funcția fiind impară rezultă $a_0 = a_n = 0$ și

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

deci

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \text{ pentru } x\in(0,\pi).$$

IV.3. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f(x) = \begin{cases}\cos x, & -\pi < x < -\varphi,\ \varphi < x < \pi,\\ \cos\varphi, & -\varphi < x < \varphi.\end{cases}$$

B. Funcția $f(x)$ este o funcție pară, periodică de perioadă 2π (fig. IV. 3). Avem

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi}\cos\varphi\ \cos nx\ dx + \frac{2}{\pi}\int_{\varphi}^{\pi}\cos x\cos nx\,dx =$$

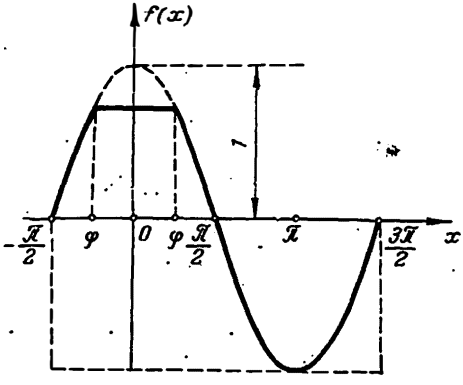


Fig. IV.3

$$= \frac{2}{\pi}\ \frac{\cos\varphi\ \sin nx}{n}\Big|_0^{\varphi} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)x}{2(n+1)} + \frac{\sin(n-1)x}{2(n-1)}\right]_{\varphi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\cos\varphi\ \sin n\varphi}{n} - \frac{\sin(n+1)\varphi}{n+1} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{n-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{n(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{n(n-1)}\right].$$

Această expresie este nedeterminată cînd $n = 0$ și $n = 1$. Pentru $n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varphi}\cos\varphi\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\varphi}^{\pi}\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}[\varphi\cos\varphi - \sin\varphi],$$

iar pentru $n = 1$,

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi}\cos\varphi\ \cos x\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\varphi}^{\pi}\cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\sin\varphi\ \cos\varphi + \frac{1}{2}(\pi-\varphi) - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right] = \frac{1}{\pi}[\pi - \varphi + \sin\varphi\ \cos\varphi].$$

Rezultă

$$f(x) = \frac{1}{\pi}(\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) + \frac{1}{\pi}(\pi - \varphi + \sin \varphi \cos \varphi)\cos x +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\sin (n+1)\varphi}{n(n+1)} - \frac{\sin (n-1)\varphi}{n(n-1)} \right] \cos nx.$$

IV.4. Să se determine forma complexă a seriei Fourier pentru funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ -1, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

R. Forma complexă a seriei Fourier este

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{inx}\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-inx}\, dx =$$

$$= \frac{-1}{2\pi\, in} e^{-inx} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi\, in} e^{-inx} \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{n\pi i}(1 - e^{-in\pi}).$$

Pentru $n = 0$ avem

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} dx = 0.$$

Pentru n par, $c_n = 0$, iar pentru n impar, $c_n = \dfrac{2}{\pi n i}$, deci

$$f(x) = \frac{2}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n}.$$

IV.5. Să se scrie seria Fourier a funcţiei de pulsaţie periodică, rectangulară (fig. IV.5)

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < t_1, \\ 0, & t_1 < t < T. \end{cases}$$

R. Pentru simplificare vom scrie această expresie în termenii unei faze x, astfel ca x să varieze de la 0 la 2π; valoarea lui x la timpul w este

$$\tau = \frac{2\pi}{T} w.$$

Avem

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < \tau, \\ 0, & \tau < x < 2\pi. \end{cases}$$

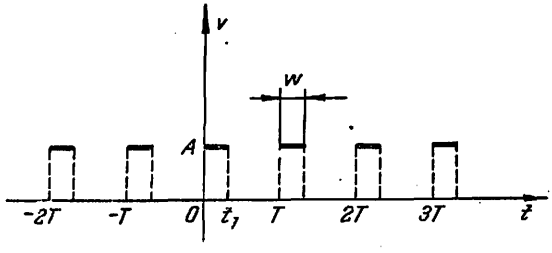


Fig. IV.5

Coeficienţii Fourier se obţin în formă exponenţială astfel

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau} A\,dx = \frac{A}{2\pi}\,x\Big|_0^{\tau} = \frac{A\tau}{2\pi} = \frac{Aw}{T},$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau} A e^{-inx}dx = \frac{-A}{2\pi ni}\,e^{-inx}\Big|_0^{\tau} = \frac{A}{2\pi ni}\,(1 - e^{-in\tau}).$$

Rezultă

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2\pi ni}(1 - e^{-in\tau})e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{2\pi ni}(e^{inx} - e^{in(x-\tau)}) +$$

$$+(e^{-in(x-\tau)} - e^{-inx}) = c_0 - \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\,[\sin n(x-\tau) - \sin nx] =$$

$$= c_0 - \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{-n\tau}{2}\cos n\left(x - \frac{\tau}{2}\right) =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi}A + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\tau}{2}\cos n\left(x - \frac{\tau}{2}\right),$$

deoarece

$$\frac{\tau}{2\pi} A = \frac{w}{T} A.$$

IV.6. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică de perioadă T definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{T} x, & \text{dacă } 0 \leqslant x < \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{dacă } x = \frac{T}{2}, \\ \frac{2a}{T} x - 2a, & \text{dacă } \frac{T}{2} < x \leqslant T. \end{cases}$$

R. Funcţia $f(x)$ (fig. IV.6) satisface condiţiile lui Dirichlet, deci poate fi dezvoltată în serie Fourier pe intervalul $[0, T]$. Fiind o funcţie impară, avem $a_0 = 0$, $a_n = 0$. În soluţia pe care o dăm vom face schimbarea

$$x = \frac{T}{2\pi} t.$$

Transformata funcţiei $f(x)$ este o funcţie perodică de perioadă 2π impară

$$g(t) = \begin{cases} \frac{a}{\pi} t, & \text{pentru } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0, & \text{pentru } t = \pi, \\ \frac{a}{\pi} t - 2a, & \text{pentru } \pi < t \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Avem

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{a}{\pi} t \sin nt \, dt = (-1)^{n+1} \frac{2a}{\pi n}.$$

Rezultă

$$g(t) = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n}.$$

Făcînd transformarea inversă $t = \frac{2\pi}{T} x$, avem

$$f(x) = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{2n\pi}{T} x.$$

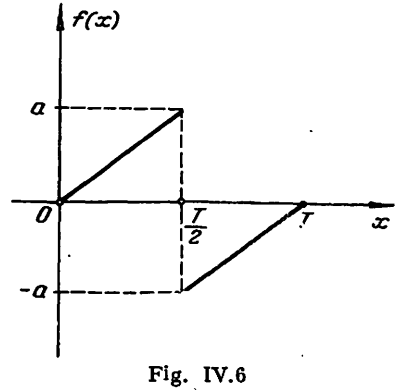


Fig. IV.6

IV.7. Să se dezvolte în serie Fourier de cosinusuri şi apoi de sinusuri funcţia periodică

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4}, & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi - x}{4}, & \text{pentru } \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

R. Funcţia $f(x)$ este continuă pe intervalul $[-\pi, \pi)$, satisface condiţiile lui Dirichlet, deci este dezvoltabilă în serie Fourier. Pentru a dezvolta această funcţie în serie de cosinusuri, o vom prelungi ca funcţie pară pe intervalul $[-\pi, 0]$, (fig. IV. 7, *a*).
Avem

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi - x}{4}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\pi}{16},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{\pi}{4n}\sin n\pi - \frac{\pi}{4n}\sin\frac{n\pi}{2} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{n}\sin n\pi - \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left\{\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right]\right\},$$

deci

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(4k+2)^2}, & \text{pentru } n = 4k + 2, \\ 0, & \text{pentru } n \neq 4k + 2, \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

şi

$$f(x) = \frac{\pi}{16} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(4k+2)x}{(4k+2)^2}.$$

Pentru a dezvolta funcția $f(x)$ în serie de sinusuri, vom considera $f(x) = -f(-x)$ pentru $x \in [-\pi, 0]$ (fig. IV.7, *b*). Funcția fiind impară, avem $a_0 = 0$, $a_n = 0$ și

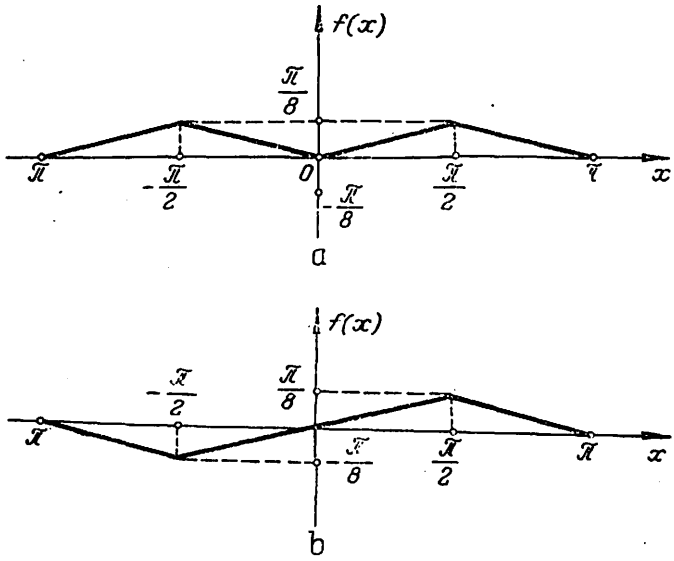


Fig. IV.7

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -f(-x)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,dx + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx\right] = \frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Rezultă

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{pentru } n = 2k, \\ (-1)^k\dfrac{2}{(2k+1)^2}, & \text{pentru } n = 2k+1, \end{cases}$$

și

$$f(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x.$$

IV.8. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f(x) = \frac{1 - \alpha \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}, \quad |\alpha| < 1, \quad x \in R, \quad \alpha \in R.$$

R. Funcția $f(x)$ este periodică de perioadă 2π, derivabilă și cu derivata continuă de R, deci este dezvoltabilă în serie Fourier pe R. Funcția $f(x)$ este pară, deci $b_n = 0$. Avem

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \alpha \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx.$$

Cu schimbarea $e^{ix} = z$, intervalul $[0, 2\pi]$ se transformă în cercul $|z| = 1$, deci

$$a_0 = \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\alpha z^2 - 2z + \alpha}{\alpha z^2 - z(1 + \alpha^2) + \alpha} \cdot \frac{dz}{z}.$$

Funcția $F(z) = \dfrac{\alpha z^2 - 2z + \alpha}{z[\alpha z^2 - z(1 + \alpha^2) + \alpha]}$ are în interiorul domeniului $|z| = 1$ punctele singulare $z = 0$ și $z = \alpha$, $(|\alpha| < 1)$ ca poli simpli. Rezultă

$$a_0 = \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\alpha z^2 - 2z + \alpha}{z[\alpha z^2 - z(1 + \alpha^2) + \alpha]} dz = \frac{1}{2} \quad R_0 + R_\alpha],$$

unde

$$R_0 = \left. \frac{\alpha z^2 - 2z + \alpha}{\alpha z^2 - z(1 + \alpha^2) + \alpha} \right|_{z=0} = 1, \quad R_\alpha = \left. \frac{\alpha z^2 - 2z + \alpha}{\alpha z \left(z - \dfrac{1}{\alpha} \right)} \right|_{z=\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 1} = 1, \quad a_0 = 1.$$

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \alpha \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} (\cos nx + i \sin nx)\, dx.$$

Făcînd schimbarea $e^{ix} = z$, obținem

$$a_n + ib_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(\alpha z^2 - 2z + \alpha) z^{n-1}}{\alpha z^2 + z(1 + \alpha^2) + \alpha} dz = R_{z=\alpha}$$

unde

$$R_\alpha = \left. \frac{(\alpha z^2 - 2z + \alpha) z^{n-1}}{\alpha \left(z - \dfrac{1}{\alpha} \right)} \right|_{z=\alpha} = \alpha^n.$$

Rezultă $a_n + ib_n = \alpha^n$, deci $a_n = \alpha^n$, $b_n = 0$ şi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cos nx, \; x \in R.$$

IV.9. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0, \\ 1, & 0 < x < d, \\ 0, & d < x < \infty. \end{cases}$$

R. Transformata Fourier a acestei funcţii este

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = \int_0^d e^{i\alpha x} dx = \frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha}\Big|_0^d = \frac{e^{i\alpha d} - 1}{i\alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha d}{\alpha} + i\,\frac{1 - \cos \alpha d}{\alpha} = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha).$$

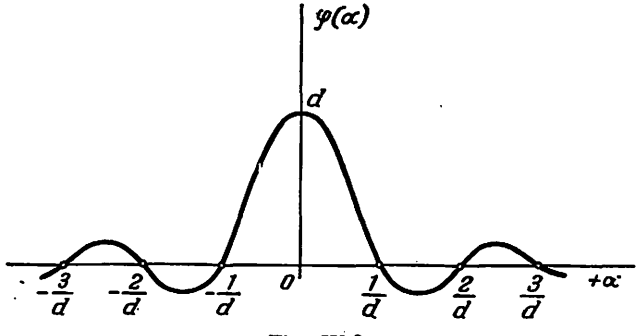


Fig. IV.9

Pentru a reprezenta grafic funcţia $\varphi(\alpha)$ (fig. IV. 9) îi vom calcula mărimea

$$|\varphi(\alpha)| = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\sin^2 \alpha d + (1 - \cos \alpha d)^2} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{2 - 2\cos \alpha d} = \frac{d}{\alpha} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha d}{2}}{\frac{\alpha d}{2}}.$$

IV.10. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcţiile:

$$f(x) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & \text{dacă } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{dacă } |x| > a, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} nx, & \text{dacă } |x| < 1, \\ 0, & \text{dacă } |x| > 1. \end{cases}$$

R. Toate condiţiile din propoziţia 5 sînt satisfăcute, deci se poate aplica formula lui Fourier. Funcţia $f(x)$ este pară, deci

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos ux \, du \int_0^\infty f(\tau) \cos u\tau \, d\tau.$$

Avem

$$\int_0^\infty f(\tau) \cos u\tau \, d\tau = \int_0^a \left(1 - \frac{\tau}{a}\right) \cos u\tau \, d\tau = \frac{h}{a} \left(\frac{1 - \cos au}{u^2}\right),$$

deci

$$f(x) = \frac{2h}{a\pi} \int_0^\infty \frac{\cos ux}{u^2} (1 - \cos au) \, du.$$

Funcţia $g(x)$ se mai scrie

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } x < -1 \text{ şi } x > 1, \\ -1, \text{ pentru } -1 < x \leqslant 0, \\ 1, \text{ pentru } 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

şi este o funcţie impară, deci

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin ux \, dx \int_0^\infty f(\tau) \sin u\tau \, d\tau,$$

unde

$$\int_0^\infty f(\tau) \sin u\tau \, d\tau = \int_0^1 \sin u\tau \, d\tau = \frac{1 - \cos u}{u},$$

deci

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos u}{u} \sin ux \, du.$$

IV.11. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcţiile

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x, \quad (\alpha > 0);$$
$$g(x) = xe^{-x^2}.$$

R. Funcțiile date satisfac condițiile propoziției 5, deci pot fi reprezentate prin integrale Fourier.

Funcția $f(x)$ este pară, deci

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\, du \int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau \cos u\tau\, d\tau.$$

Scriind $\cos\lambda\tau = \dfrac{e^{i\lambda\tau} + e^{-i\lambda\tau}}{2}$, făcînd înmulțirile și integrînd, obținem

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau\cos u\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{(u-\beta)^2+\alpha^2} + \frac{\alpha}{(u+\beta)^2+\alpha^2}\right].$$

Rezultă

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{\alpha^2+(u+\beta)^2} + \frac{1}{\alpha^2+(u-\beta)^2}\right]\cos ux\, du.$$

Funcția $g(x)$ este impară, deci

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin ux\, du \int_0^\infty \tau e^{-\tau^2}\sin u\tau\, d\tau.$$

Avem

$$\int_0^\infty \tau e^{-\tau^2}\sin u\tau\, d\tau = \left.\frac{e^{-\tau^2}\sin u\tau}{-2}\right|_0^\infty + \frac{u}{2}\int_0^\infty e^{-\tau^2}\cos u\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4u}\left[\int_0^\infty e^{-\tau^2+iu\tau}d\tau + \int_0^\infty e^{-\tau^2-iu\tau}d\tau\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{4}ue^{-\frac{u^2}{4}},$$

deci

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty ue^{-\frac{u^2}{4}}\sin ux\, du.$$

IV.12. Să se determine funcția $\varphi(\alpha)$ dacă

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha)\sin\alpha x\, d\alpha = e^{-x}, \quad (x>0).$$

R. Înmulţind cu $\frac{i}{\pi}$ se obţine

$$\frac{i}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha = \frac{i}{\pi}e^{-x}.$$

Soluţia acestei ecuaţii este dată de prima relaţie (14) şi anume

$$\varphi(\alpha) = -2i\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin\alpha x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty [e^{-x(1-\alpha i)} - e^{-x(1+\alpha i)}]\,dx = \frac{1}{\pi i}\left[\frac{1}{1-\alpha i} - \frac{1}{1+\alpha i}\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

IV.13. Să se determine funcţia $\varphi(\alpha)$ dacă

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha)\cos\alpha u\,d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos u, & \text{pentru } u\in(0,\pi), \\ 0, & \text{pentru } u>\pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{pentru } u=\pi. \end{cases}$$

R. Ecuaţia dată se mai scrie

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\alpha)\cos\alpha u\,d\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos u, & \text{pentru } u\in(0,\pi), \\ 0, & \text{pentru } u>\pi, \\ -\frac{1}{4}, & \text{pentru } u=\pi. \end{cases}$$

Soluţia acestei ecuaţii este dată de relaţia (13) şi anume

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\alpha u\,du = 2\int_0^\pi \frac{\cos u}{2}\cos\alpha u\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos u(1+\alpha) + \cos u(1-\alpha)]\,du = \frac{u\sin u\pi}{1-u^2}.$$

Capitolul V

CALCUL OPERAȚIONAL

Fie $f(t)$ o funcție măsurabilă reală sau complexă, definită pe dreapta reală și p un parametru real sau complex.

Definiție. *Dacă*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \tag{1}$$

există (integrala fiind luată în sensul lui Lebesgue), ea poartă numele de integrala lui Laplace unilaterală a funcției $f(t)$.

Dacă $f(t) = 0$ pentru $t < 0$, integrala (1) se reduce la $\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$.

Notăm

$$F(p) = \mathscr{L} f(t) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{2}$$

Definiția 1. *Transformarea care face să corespundă funcției* $f(t)$ *funcția* $F(p)$, *poartă numele de transformare Laplace, iar* $F(p)$ *se numește transformata Laplace a funcției* $f(t)$.

Fie α marginea inferioară a numerelor reale p_0 pentru care $e^{-p_0 t} f(t)$ este funcție sumabilă în $[0, \infty)$. Transformata Laplace $F(p)$ este definită în semiplanul deschis $\mathrm{Re}\, p > \alpha$, iar α se numește *abscisă de convergență* corespunzătoare funcției $f(t)$.

Definiţie. *Se numeşte original o funcţie complexă $f(t)$, definită pe $[0, \infty)$, (dacă se extinde $f(t)$ pe $(-\infty, +\infty)$, atunci $f(t) = 0$ pentru $t < 0$), continuă pe acest interval în afară, eventual, de un număr finit de puncte şi cu creştere mărginită.*

Cea mai simplă funcţie original este *funcţia unitate*

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{pentru } t = 0, \\ 1, & \text{pentru } t > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Definiţia 2. *Fie $f(t)$ un original şi s_0 abscisa sa de convergenţă. Se numeşte transformata Laplace a funcţiei $f(t)$* (sau imagine) *funcţia*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Transformata Laplace $F(p)$ este o funcţie olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} p > s_0$ şi

$$F'(p) = \int_0^\infty [-tf(t)]\, e^{-pt}\, dt. \tag{4}$$

Vom da cîteva proprietăţi importante ale transformatei Laplace.

Propoziţia 1. *Transformata Laplace este o transformare liniară, adică*

$$\mathscr{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda \mathscr{L} f(t) + \mu \mathscr{L} g(t), \ (\lambda, \mu = \text{constante complexe}). \tag{5}$$

Propoziţia 2. (Teorema asemănării). *Dacă $F(p)$ este imaginea funcţiei $f(t)$, oricare ar fi constanta $\alpha > 0$, avem*

$$\mathscr{L} f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{6}$$

Propoziţia 3. (Teorema întîrzierii). *Dacă $f(t)$ este un original şi τ o constantă, $f(t - \tau)$ este un original şi*

$$\mathscr{L} f(t - \tau) = e^{-p\tau} \mathscr{L} f(t). \tag{7}$$

Propoziţia 4. (Derivata unui original). *Dacă $f(t)$ are derivată continuă pe $(0, \infty)$ şi dacă $f'(t)$ este un original* (de unde *rezultă că şi $f(t)$ este un original şi $\lim_{t \to +0} f(t) = f(+0)$ există*), *atunci din $\mathscr{L} f(t) = F(p)$ deducem*

$$\mathscr{L} f'(t) = pF(p) - f(+0).$$

Dacă $f(t)$ are derivată continuă de ordinul n pe $(0, \infty)$ și dacă $f^{(n)}(t)$ este un original și $\mathscr{L} f(t) = F(p)$, rezultă

$$\mathscr{L} f^{(n)}(t) = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \cdots - f^{(n-1)}(+0). \quad (8)$$

Propoziția 5. (Derivarea imaginii). *Dacă $\mathscr{L} f(t) = F(p)$, atunci*

$$F^{(n)}(p) = \mathscr{L}[(-1)^n t^n f(t)]. \quad (9)$$

Propoziția 6. (Integrarea unui original). *Fie $f(t)$ un original. Dacă $f(t)$ este continuă pe $(0, \infty)$ și $\mathscr{L} f(t) = F(p)$, atunci*

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right] = \frac{F(p)}{p}. \quad (10)$$

Propoziția 7. (Integrarea imaginii). *Dacă $\frac{f(t)}{t}$ este un original și $F(p) = \mathscr{L} f(t)$, atunci*

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q. \quad (11)$$

Propoziția 8. *Fie $f(t)$ un original și s abscisa de convergență corespunzătoare. Atunci $\mathrm{e}^{at} f(t)$ este un original și pentru $\mathrm{Re}\, p > s + a$ avem*

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at} f(t)] = F(p - a). \quad (12)$$

Propoziția 9. *Dacă $f(t)$ și $g(t)$ sînt originale și abscisele lor de convergență sînt s_1, respectiv s_2, atunci funcția numită produs de compoziție*

$$(f * g)(t) = \int_0 f(\tau) g(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau \quad (13)$$

este un original cu abscisa de convergență $s_0 \geqslant \max(s_1, s_2)$. Dacă $F(p) = \mathscr{L} f(t)$ și $G(p) = \mathscr{L} g(t)$, atunci

$$F(p) G(p) = \mathscr{L} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau. \quad (14)$$

Propoziția 10. *Dacă $f(t)$ este un original și $F(p)$ transformata sa Laplace, atunci în fiecare punct t în care f este diferențiabilă are loc formula de inversiune a lui Mellin-Fourier:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p. \quad (15)$$

Propoziția 11. *Dacă $f(t)$ și $g(t)$ sînt originale cu abscisele de convergență s_1, respectiv s_2, produsul lor $f(t)g(t)$ este un original cu abscisa de convergență $s_1 + s_2$. Dacă $F(p) = \mathscr{L}f(t)$ și $G(p) = \mathscr{L}g(t)$, avem*

$$\mathscr{L}[f(t)\,g(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)\,dq, \qquad a > s_1. \tag{16}$$

Propoziția 12. *Dacă $F(p)$ este o funcție rațională*

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

în care gradul numărătorului este mai mic decît gradul numitorului iar $B(p)$ are rădăcini simple, fie acestea $p_0, p_1, \ldots, p_n$, atunci $F(p)$ este transformata Laplace (imaginea) *a funcției*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\, e^{p_k t}. \tag{17}$$

Dacă una dintre rădăcini este zero, de exemplu $p_0 = 0$, relația (17) se scrie

$$f(t) = \frac{A(0)}{R(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{R'(p_k)} \frac{e^{p_k t}}{p_k} \tag{18}$$

cu $B(p) = pR(p)$.

Această egalitate (18) se numește *formula lui Heaviside.*

Dacă numărătorul are rădăcini multiple și dacă α_k este ordinul de multiplicitate al polului p_k, avem

$$f(t) = \sum_{k} \frac{1}{(\alpha_k - 1)!} \left[(p - p_k)^{\alpha_k} F(p)\, e^{pt}\right]^{(\alpha_k - 1)}_{p = p_k}. \tag{19}$$

Propoziția 13. *Dacă $F(p)$ este olomorfă în afara unui cerc cu centrul în origine și raza R și dacă dezvoltarea sa în serie Laurent este*

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}, \qquad |p| < R,$$

atunci $F(p)$ este transformata Laplace a funcției

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!}\, t^{n-1}. \tag{20}$$

Pornind de la definiția transformatei Laplace și uztilizînd diversele propoziții, obținem următoarele imagini, respectiv originale :

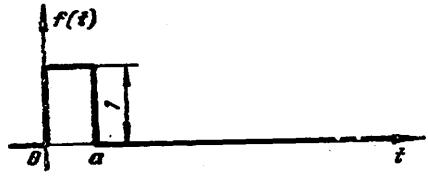
Nr.	$F(p)$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	$\eta(t)$
2	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
3	$\frac{1}{p-\alpha \ln a}$	$a^{\alpha t}$, $a > 1$
4	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
5	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
6	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\operatorname{sh} at$
7	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{ch} at$
8	$\frac{a^2}{p(p^2+a^2)}$	$1-\cos at$
9	$\frac{a^2}{p(p^2-a^2)}$	$\operatorname{ch} at - 1$
10	$\frac{p+k}{(p+a)^2}$	$[(k-a)t+1]\,e^{-at}$
11	$\frac{p+k}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sqrt{k^2+a^2}\sin(at+\varphi)$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{k}$
12	$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{e^{-at}}{a^2}+\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}$
13	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{be^{-at}-ae^{-bt}}{a-b}\right]$
14	$\frac{p+c}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{c}{ab}+\frac{c-a}{a(a-b)}e^{-at}+\frac{c-b}{b(b-a)}e^{-bt}$
15	$\frac{p+b}{(p+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\cos at$

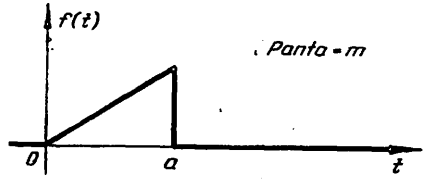
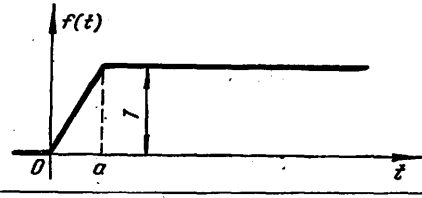
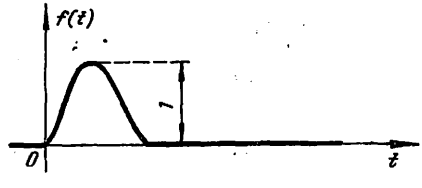
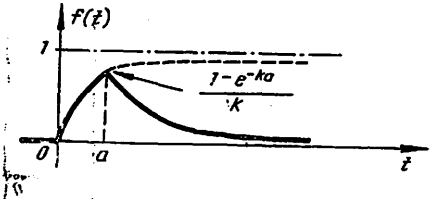
Nr.	$F(p)$	$f(t)$
16	$\dfrac{a}{(p+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\sin at$
17	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
18	$\dfrac{p}{(p+a)^2}$	$e^{-at}(1-at)$
19	$\dfrac{p^2+pc+d}{p(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{d}{ab}+\dfrac{(a^2-ac+d)e^{-at}}{a(a-b)}-\dfrac{(b^2-bc+d)e^{-bt}}{b(a-b)}$
20	$\dfrac{p+a}{p(p^2+b^2)}$	$\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\cos(bt+\varphi),\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}\cdot$
21	$\dfrac{p^2+pc+d}{p(p^2+b^2)}$	$\dfrac{d}{b^2}-\dfrac{\sqrt{(d-b^2)^2+c^2b^2}}{b^2}\cos(bt+\varphi),\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{bc}{d-b^2}\cdot$
22	$\dfrac{1}{p[(p+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}}e^{-at}\sin(bt-\varphi),\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$
23	$\dfrac{1}{p(p^2+2ap+\omega_0^2)},\ \omega_0^2>a^2$	$\dfrac{1}{\omega_0^2}\left[1-\dfrac{\omega_0}{\omega}e^{-at}\sin(\omega t+\varphi)\right],\ \omega^2=\omega_0^2-a^2,\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\omega}{a}\cdot$
24	$\dfrac{1}{p(p^2+2ap+\omega_0^2)},\ \omega_0^2<a^2$	$\dfrac{1}{\omega_0^2}\left[1-\dfrac{\omega_0^2}{n-m}\left(\dfrac{e^{-mt}}{m}-\dfrac{e^{-nt}}{n}\right)\right]$, unde $(-m)$ şi $(-n)$ sînt rădăcinile ecuaţiei $p^2+2ap+\omega_0^2=0$
25	$\dfrac{1}{p^2+2ap+\omega_0^2},\ \omega_0^2>a^2$	$\dfrac{e^{-at}}{\omega}\sin\omega t,\ \omega^2=\omega_0^2-a^2$
26	$\dfrac{1}{p^2+2ap+\omega_0^2},\ \omega_0^2<a^2$	$\dfrac{1}{n-m}(e^{-mt}-e^{-nt})$, m şi n sînt definiţi la nr. 24
27	$\dfrac{\omega\cos\varphi\pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t\pm\varphi)$
28	$\dfrac{p\cos\varphi\pm\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t\pm\varphi)$
29	$\dfrac{\omega\cos\varphi\pm(p+b)\sin\varphi}{(p+b)^2+\omega^2}$	$e^{-bt}\sin(\omega t\pm\varphi)$

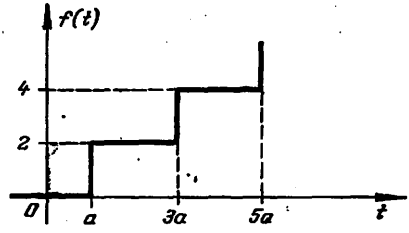
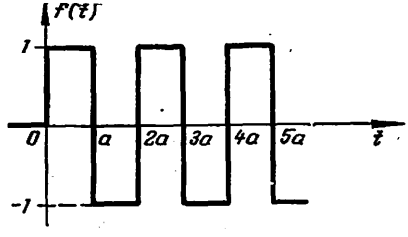
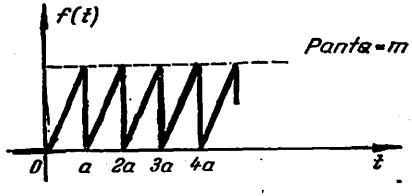
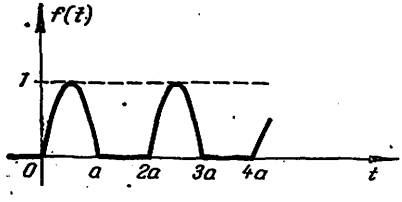
Nr.	$F(p)$	$f(t)$
30	$\frac{(p+b)\cos\varphi \pm \omega\sin\varphi}{(p+b)^2+\omega^2}$	$e^{-bt}\cos(\omega t \pm \varphi)$
31	$\frac{(p-a)^2}{p(p+a)^2}$	$1-4ate^{-at}$
32	$\frac{(p-a)(p-b)}{p(p+a)(p+b)}$	$1+2\frac{a+b}{a-b}(e^{-at}-e^{-bt})$
33	$\frac{(p-a)^2}{p(p^2+a^2)}$	$1-2\sin at$
34	$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
35	$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{e^{-at}+[1+(b-a)t]e^{-bt}}{(b-a)^2}$
36	$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{t^2e^{-at}}{2}$
37	$\frac{1}{p^3+a^3}$	$\frac{1}{3a^2}\left[e^{-at}-e^{\frac{at}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)\right]$
38	$\frac{p}{p^3+a^3}$	$\frac{1}{3a}\left[-e^{-at}+e^{\frac{at}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)\right]$
39	$\frac{p^2}{p^3+a^3}$	$\frac{1}{3}\left(e^{-at}+2e^{\frac{at}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}at\right)$
40	$\frac{1}{(p+c)[(p+a)^2+b^2]}$	$\frac{e^{-ct}}{(c-a)^2+b^2}+\frac{e^{-at}\sin(bt-\varphi)}{b[(c-a)^2+b^2]^{1/2}},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{c-a}$
41	$\frac{1}{p^2(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2}t-\frac{1}{b^3}\sin bt$
42	$\frac{1}{p^2(p^2-b^2)}$	$\frac{1}{b^3}\operatorname{sh} bt-\frac{1}{b^2}t$
43	$\frac{1}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}a^3}\left(\operatorname{ch}\frac{a}{\sqrt{2}}t\sin\frac{a}{\sqrt{2}}t-\operatorname{sh}\frac{a}{\sqrt{2}}t\cos\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)=$ $=\frac{2}{a^2}\operatorname{Ber} at^*\operatorname{Bei} at$

Nr.	$F(p)$	$f(t)$
44	$\frac{p}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{a^2}\sin\frac{a}{\sqrt{2}}t\,\mathrm{sh}\frac{a}{\sqrt{2}}t$
45	$\frac{p^2}{p^4+a^4}$	$\cos\frac{a}{\sqrt{2}}t\,\mathrm{ch}\frac{a}{\sqrt{2}}t$
46	$\frac{1}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(\mathrm{sh}\,at-\sin at)$
47	$\frac{p}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2}(\mathrm{ch}\,at-\cos at)$
48	$\frac{p^2}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2a}(\mathrm{sh}\,at+\sin at)$
49	$\frac{p^3}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,at+\cos at)$
50	$\frac{p}{[p^2+(b+a)^2][p^2+(b-a)^2]}$	$\frac{1}{2ab}\sin at\sin bt$
51	$\frac{p^2-2a^2}{p^4+4a^4}$	$\frac{1}{a}\cos at\,\mathrm{sh}\,at$
52	$\frac{p^2+2a^2}{p^4+4a^4}$	$\frac{1}{a}\sin at\,\mathrm{ch}\,at$
53	$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}$	$\frac{\sin^3 at}{6a^3}$
54	$\frac{p(p^2+7a^2)}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}$	$\cos^3 at$
55	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
56	$\frac{1}{(p^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{8a^5}[(3-a^2t^2)\sin at-3\,at\cos at]$
57	$\frac{1}{(p^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{8a^5}[(3+a^2t^2)\,\mathrm{sh}\,at-3a\,\mathrm{ch}\,at]$
58	$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$, $n=1, 2, 3, 4, \ldots$

Nr.	$F(p)$	$f(t)$
59	$\frac{1}{p(p+1)^n}$	$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t e^{-u}u^{n-1}\,du,\ n=1,2,3,4,\ldots$
60	$\frac{2n!}{p(p^2+2^2)(p^2+4^2)\ldots[p^2+(2n)^2]}$	$\sin^{(2n)} t$
61	$\frac{(2n+1)!}{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\ldots[p^2+(2n+1)^2]}$	$\sin^{(2n+1)} t$
62	$\frac{1}{p(ap+1)\ldots(ap+n)}$	$\frac{1}{n!}\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right)^n$
63	$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$	$J_0(at)$ funcţia lui Bessel de speţa intii şi de ordinul zero
64	$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}+p}$	$\frac{1}{a}\cdot\frac{J_1(at)}{t}$
65	$\frac{1}{(\sqrt{p^2+a^2}+p)^n}$	$\frac{n}{a^n}\cdot\frac{J_n(at)}{t},\ n>0$
66	$\frac{1}{p(\sqrt{p^2+a^2}+p)^n}$	$\frac{n}{a^n}\int_0^t\frac{J_n(au)}{u}\,du,\ n>0$
67	$(\sqrt{p^2+a^2}-p)^n$	$\frac{na^n}{t}J_n(at)$
68	$\frac{\sqrt{p}}{p(p-a^2)}$	$\frac{1}{a}e^{a^2t}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$
69	$\frac{p}{(p-a)^{3/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
70	$\frac{\sqrt{p+a}}{p}$	$\sqrt{a}\operatorname{erf}(\sqrt{at})+\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
71	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
72	$\frac{1}{p}e^{-\frac{a}{p}}$	$J_0(2\sqrt{at})$
73	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{at})$

Nr.	$F(p)$	$f(t)$
74	$\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sin\left(2\sqrt{at}\right)$
75	$e^{-a\sqrt{p}}$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}, a \geqslant 0$
76	$\operatorname{arctg} \frac{a}{p}$	$\frac{\sin at}{t}$
77	$\ln \frac{p+b}{p+a}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$
78	$\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$\mathrm{Ci}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\cos u}{u} du$
79	$\frac{1}{p} \operatorname{arctg} p$	$\mathrm{Si}(t) = \int_{0}^{t} \frac{\sin u}{u} du$
80	$\frac{1}{p} \ln p$	$-\ln t + \Gamma'(1), \quad \Gamma'(1) = -0{,}5772$
81	$\frac{1}{p^2+1} \ln p$	$\cos t \cdot \mathrm{Si}(t) - \sin t \cdot \mathrm{Ci}(t)$
82	$\frac{p}{p^2+1} \ln p$	$-\sin t \cdot \mathrm{Si}(t) - \cos t \cdot \mathrm{Ci}(t)$
83	$\ln \frac{p^2+a^2}{p^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cos at)$
84	$\ln \frac{p^2-a^2}{p^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \operatorname{ch} at)$
85	$\frac{1}{p-a} \ln p$	$e^{at}[\ln a - E_i(-at)]$, unde $E_i(-x) = -\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du, x > 0$
86	$\frac{1 - e^{-pa}}{p}$	

Nr.	$F(p)$	$f(t)$
87	$\frac{m}{p^2}(1-e^{-pa})-\frac{ma}{p}e^{-pa}$	
88	$\frac{1}{a}\,\frac{1-e^{-pa}}{p^2}$	
89	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}(1+e^{-pa}),\ \omega=\frac{\pi}{a}$	
90	$\frac{1}{p(p+k)}\ 1-e^{-pa})$	

Nr.	$F(p)$	$f(t)$
91	$\dfrac{1}{p\,\mathrm{sh}\,pa}$	
92	$\dfrac{1}{p}\,\dfrac{1-e^{-pa}}{1+e^{-pa}}$ sau $\dfrac{1}{p}\,\mathrm{th}\,\dfrac{pa}{2}$	
93	$\dfrac{m}{p^2}-\dfrac{ma}{2p}\left(\coth\dfrac{pa}{2}-1\right)$	
94	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-\frac{\pi p}{\omega}}},\ \omega=\dfrac{\pi}{a}$	

PROBLEME

V.1. Să se calculeze imaginile următoarelor funcţii :

1° $t \sin at$; 2° $\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$; 3° $\cos^2 kt$; 4° $e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$.

R. 1°

$$\mathcal{L} \sin at = \int_0^\infty e^{-pt} \sin at \, dt = \frac{a}{p^2 + a^2}.$$

Derivînd în raport cu p această egalitate, obţinem

$$\frac{d}{dp} [\mathcal{L} \sin at] = -\int_0^\infty e^{-pt} t \sin at \, dt,$$

de unde rezultă imediat

$$\mathcal{L} t \sin at = \frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}.$$

Obţinem imediat acelaşi rezultat aplicînd teorema de derivare a imaginii

$$F'(p) = \mathcal{L}[-tf(t)],$$

unde $f(t) = \sin at$ iar $F(p) = \mathcal{L} \sin at = \dfrac{a}{a^2 + p^2}$.

2° Aplicăm teorema de integrare a imaginii

$$\mathcal{L} \frac{f(t)}{t} = \int_p^\infty F(\lambda) \, d\lambda,$$

unde $F(p) = \mathcal{L} f(t)$

Avem

$$\mathcal{L}(e^{-at} - e^{-bt}) = \mathcal{L} e^{-at} - \mathcal{L} e^{-bt} = \frac{1}{p + a} - \frac{1}{p + b}$$

şi

$$\mathcal{L} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = \int_p^\infty \frac{d\lambda}{\lambda + a} - \int_p^\infty \frac{d\lambda}{\lambda + a} = \ln \frac{p + b}{p + a}.$$

3°

$$\mathcal{L} \cos^2 kt = \mathcal{L} \frac{\cos 2kt + 1}{2} = \frac{1}{2} [\mathcal{L} \cos 2kt + \mathcal{L} \eta(t)] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{p}{p^2 + 4k^2} + \frac{1}{p} \right] = \frac{p^2 + 2k^2}{p(p^2 + 4k^2)},$$

4° Aplicăm propoziția 8:

$$\mathscr{L}\,[e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\varphi) = G(p+\lambda),$$

unde

$$G(p) = \mathscr{L}\cos(\omega t+\varphi) = \mathscr{L}\cos\omega\left(t+\frac{\varphi}{\omega}\right).$$

Aplicînd propoziția 3 și apoi propoziția 2, obținem

$$G(p) = \mathscr{L}\cos\omega\left(t+\frac{\varphi}{\omega}\right) = e^{p\frac{\varphi}{\omega}}\,\mathscr{L}\cos\omega t = e^{p\frac{\varphi}{\omega}}\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

de unde rezultă

$$G(p+\lambda) = e^{(p+\lambda)\frac{\varphi}{\omega}}\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}.$$

V.2. Să se calculeze imaginile funcțiilor

1° $f(t) = \begin{cases} c, \text{ pentru } 2n\tau < t < (2n+1)\tau \\ -c, \text{ pentru } (2n+1)\tau < t < 2(n+1)\tau, \end{cases} \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \\ c = \text{const} \end{pmatrix}$

2° $g(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < 0, \\ \dfrac{t}{\tau}, \text{ pentru } 0 < t < \tau, \\ 2 - \dfrac{t}{\tau} \text{ pentru, } \tau < t < 2\tau, \\ 0, \text{ pentru } t > 2\tau. \end{cases}$

R. Funcția $f(t)$ poate fi scrisă cu ajutorul funcției unitate $\eta(f)$ sub forma

$$f(t) = c[\eta(t) - [\eta(t-\tau)] - c[\eta(t-\tau) - \eta(t-2\tau)] + c[\eta(t-2\tau) - \eta(t-3\tau)] +$$

$$+ \ldots + (-1)^n c[\eta(t-n\tau) - \eta(t-(n+1)\tau)] + \ldots = c\eta(t) + 2c\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\eta(t-n\tau).$$

Avem

$$F(p) = \mathscr{L}f(t) = c\mathscr{L}\eta(t) + 2c\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathscr{L}\eta(t-n\tau).$$

Aplicînd teorema întîrzierii, rezultă

$$F(p) = \frac{c}{p} + \frac{2c}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-np\tau}.$$

Funcţia $g(t)$ se mai scrie

$$g(t) = \frac{t}{\tau}\eta(t) - \frac{2}{\tau}(t-\tau)\eta(t-\tau) + \frac{1}{\tau}(t-2\tau)\eta(t-2\tau),$$

$$G(p) = \mathcal{L}g(t) = \frac{1}{\tau}\mathcal{L}t - \frac{2}{\tau}\mathcal{L}(t-\tau) + \frac{1}{\tau}\mathcal{L}(t-2\tau).$$

Aplicînd teorema întîrzierii, se obţine

$$G(p) = \frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{p^2} - 2\frac{e^{-p\tau}}{p^2} + \frac{e^{-2p\tau}}{p^2}\right] = \frac{1}{p^2\tau}(1 - e^{-p\tau})^2.$$

V.3. Să se determine imaginea funcţiei periodice (nesinusoidale) $h(t) = h(t + 2ka)$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ reprezentate prin graficul din fig. V.3, *a* şi a funcţiei antiperiodice reprezentate prin graficul din fig. V.3, *b*.

R. Deoarece $h(t)$ este periodică, avem

$$\mathcal{L}h(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt}h(t)dt = \int_0^{2a} e^{-pt}h(t)dt + \int_{2a}^{4a} e^{-pt}h(t)\,dt + \ldots +$$

$$+ \int_{2na}^{2(n+1)a} e^{-pt}h(t)\,dt + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2na}^{2(n+1)a} e^{-pt}h(t)\,dt.$$

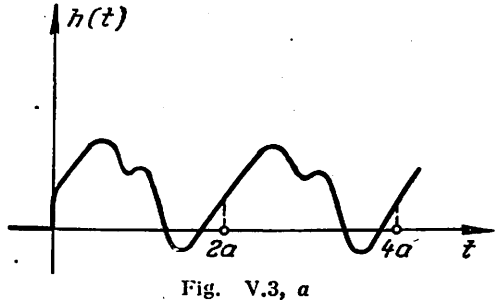


Fig. V.3, *a*

Punînd $u = t - 2na$, avem

$$h(t) = h(u + 2na),$$

deci

$$h(u) = h(u + 2na).$$

Cu această schimbare de variabilă, obţinem

$$\mathcal{L}h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2a} e^{-p(u+2na)}h(u)\,du=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2pna}\int_0^{2a} e^{-pu}h(u)\,du=\frac{1}{1-e^{-2pa}}\int_0^{2a} e^{-pu}h(u)\,du. \tag{1}$$

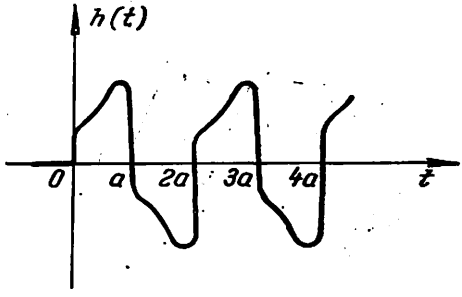


Fig. V.3, *b*

În al doilea caz putem scrie

$$\int_0^{2a} e^{-pu}h(u)\,du=\int_0^{a} e^{-pu}h(u)\,du+\int_a^{2a} e^{-p(u+a)}h(u)\,du=$$

$$=\int_0^{a} e^{-pu}h(u)\,du-e^{-pa}\int_0^{a} e^{-pu}h(u)\,du=(1-e^{-pa})\int_0^{a} e^{-pa}h(u)\,du,$$

Dar pentru aceste funcţii avem $h(t)=h(t+2ka)$ şi $h(t)=-h(t+a)$, deci, ţinînd seama de ultima relaţie şi de (1), rezultă

$$\mathcal{L}h(t)=\frac{1-e^{-pa}}{1-e^{-2pa}}\int_0^{a} e^{-pt}h(t)\,dt.$$

V.4. Să se calculeze imaginea funcţiei periodice $h(t)$ de perioadă T, pentru $t>0$, definită astfel (fig. V.4):

$$h(t)=\begin{cases} 0, \text{ pentru } t<0, \\ \dfrac{2Et}{T}, \text{ pentru } 0\leqslant t<\dfrac{T}{2} \\ \dfrac{2E(T-t)}{T}, \text{ pentru } \dfrac{T}{2}\leqslant t<T \text{ etc.} \end{cases}$$

R. Pentru funcţii periodice de perioadă T aplicăm formula

$$\mathcal{L}h(t) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} h(t)\, dt.$$

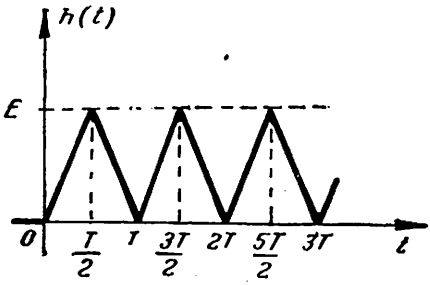


Fig. V.4

Deci

$$\mathcal{L}\, h(t) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2Et}{T} e^{-pt}\, dt + \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_{\frac{T}{2}}^{0} \frac{2E\,(T-t)}{T} e^{-pt}\, dt =$$

$$= \frac{2E}{T(1 - e)^{-pT}} \int_0^{\frac{T}{2}} t e^{-pt} dt + \frac{2E}{T(1 - e^{-pT})} \int_{\frac{T}{2}}^{0} (T - t) e^{-pT} dt.$$

Integrînd prin părţi, obţinem

$$\mathcal{L}h(t) = \frac{2E}{T(1 - e^{-pT})} \left[-\frac{T}{2p} e^{-p\frac{T}{2}} - \frac{e^{-p\frac{T}{2}}}{p^2} + \frac{1}{p^2} - \frac{T}{p} \left(e^{-pT} e^{-p\frac{T}{2}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{Te^{-pT}}{p} - \frac{Te^{-p\frac{T}{2}}}{2p} + \frac{e^{-pT}}{p^2} - \frac{e^{-p\frac{T}{2}}}{p^2} \right] = \frac{2E}{p^2 T} \frac{1 - e^{-p\frac{T}{2}}}{1 + e^{-p\frac{T}{2}}} = \frac{2E}{p^2 T} \operatorname{th} \frac{pT}{4}.$$

V.5. Să se arate că $\frac{1}{\sqrt{1+p}}$ este transformata Laplace a funcţiei erorilor

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\mu^2}\, d\mu.$$

R. Avem

$$\mathscr{L}^{-1}\frac{p}{\sqrt{p}(p-1)} = e^t * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = e^t \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{2\sqrt{\tau}}\,d\tau.$$

Făcînd schimbarea de varabilă $\mu^2 = \tau$, rezultă

$$\mathscr{L}^{-1}\frac{p}{\sqrt{p}(p-1)} = e^t \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-\mu^2}d\mu = e^t \cdot \operatorname{erf}(\sqrt{t}),$$

sau

$$\frac{p}{\sqrt{p}(p-1)} = \mathscr{L}e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}).$$

Aplicînd teorema deplasării şi anume, dacă

$$\mathscr{L}h(t) = H(p) \text{ atunci } \mathscr{L}e^{at}h(t) = \frac{p}{p-a}H(p-a).$$

avem

$$\frac{p}{p+1}H(p+1) = \frac{p}{p+1}\cdot\frac{p+1}{p\sqrt{p+1}} = \frac{1}{\sqrt{p+1}} = \mathscr{L}\operatorname{erf}(\sqrt{t}).$$

V.6. Să se calculeze imaginile următoarelor funcţii :

$$\begin{array}{ll} 1^\circ\ \cos t * t, & \\ 2^\circ\ |\sin t| * \eta(t), \text{ cu } \eta(t) = & \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < 0, \\ 1, \text{ pentru } t > 0, \end{cases} \\ 3^\circ\ e^{\lambda t} * \sin at. & \end{array}$$

R. Aplicăm teorema lui Borel (propoziţia 9)

$$F(p)G(p) = \mathscr{L}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \mathscr{L}\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \mathscr{L}[f(t) * g(t)] = \mathscr{L}[g(t) * f(t)].$$

Avem deci

$$1^\circ\ \mathscr{L}(\cos t * t) = \mathscr{L}\cos t \cdot \mathscr{L}t = \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

---

* Vezi formula (13) din Introducere.

2° Avem

$$\mathcal{L}\,|\sin t| = \frac{1}{1+p^2}\,\mathrm{th}\,p\,\frac{\pi}{2},$$

deci

$$\mathcal{L}\,[|\sin t| * \eta(t)] = \frac{1}{p(1+p^2)}\,\mathrm{th}\,p\,\frac{\pi}{2}.$$

3°

$$F(p) = \mathcal{L}\,e^{\lambda t} = \frac{1}{p-\lambda},$$

$$G(p) = \mathcal{L}\,\sin at = \frac{a}{p^2+a^2}.$$

Rezultă

$$\mathcal{L}\,(e^{\lambda t} * \sin at) = F(p)\cdot G(p) = \frac{a}{(p-\lambda)(p^2+a^2)}.$$

V.7. Să se determine imaginea consinusului integral şi a sinusului integral.

R. Prin definiţie avem

$$\mathrm{Si}\,(t) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{si}\,(t) = \frac{\pi}{2} - \int_t^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

$$\mathrm{Ci}\,(t) = -\int_t^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Avem

$$\mathcal{L}\sin t = \frac{1}{p^2+1}, \qquad \mathcal{L}\cos t = \frac{p}{p^2+1}. \tag{1}$$

Aplicînd acestor relaţii formula

$$\mathcal{L}\int_t^\infty \frac{h(x)}{x}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^p F(s)\,ds,$$

obţinem

$$\mathcal{L}\,\mathrm{si}\,(t) = -\mathcal{L}\int_t^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{1}{p}\int_0^p \frac{ds}{s^2+1} = \frac{-1}{p}\,\mathrm{arctg}\,p.$$

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Ci}(t) = -\mathcal{L}\int_t^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = -\frac{1}{p}\int_0^p \frac{s\,ds}{s^2+1} = -\frac{1}{p}\ln\sqrt{p^2+1}.$$

V.8. Să se calculeze originalele următoarele funcţii

$$1^\circ\ \frac{p^2+3p+1}{(p+1)(p+2)(p+3)}\ ;\ 2^\circ\ e^{-kp}\frac{1}{p+a}\ ;\ 3^\circ\ \frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p^3}\ ;\ 4^\circ\ \frac{1}{(p^2+a)^2}.$$

R. 1° Descompunerea în elemente simple conduce la

$$\frac{p^2+3p+1}{(p+1)(p+2)(p+3)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

Deci

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{p^2+3p+1}{(p+1)(p+2)(p+3)} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p+1}+\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p+2}+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p+3} =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t}+e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3}.$$

Observînd că numitorul are rădăcini simple şi gradul polinomului de la numărător este mai mic decît al celui de la numitor, se poate aplica direct prima teoremă de dezvoltare,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{3}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t},\quad \text{dacă } F(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

p_k fiind rădăcinile numitorului.

Avem $B'(p) = 3p^2+12p+11$, deci

$$f(t) = \left[\frac{p^2+3p+1}{3p^2+12p+11}e^{pt}\right]_{p=-1}+\left[\frac{p^2+3p+1}{3p^2+12p+11e}e^{pt}\right]_{p=-2}+$$

$$+\left[\frac{p^2+3p+1}{3p^2+12p+11}e^{pt}\right]_{p=-3} = -\frac{1}{2}e^{-t}+e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

2° Remarcînd că $\frac{1}{p+a} = \mathcal{L}e^{-at}$, putem scrie

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-kp}\frac{1}{p+a}\right] = \mathcal{L}^{-1}[e^{-kp}\mathcal{L}e^{-at}].$$

Teorema întîrzierii ne dă

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-kp}\mathcal{L}e^{-at}] = \begin{cases}0, & \text{pentru } t<k,\\ e^{-a(t-k)}, & \text{pentru } t\geqslant k.\end{cases}$$

3° Avem

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p^3} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\cdot\frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p}\right).$$

Pentru a determina orginalul funcției $\frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p}$, să determinăm într-un caz mai general originalul funcției $F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}$. Observăm că $F(p)$ satisface condițiile din a doua teoremă de dezvoltare. Evident

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,p^{n+\varepsilon+1}}, \quad |p| > \varepsilon > 0,$$

cu ε suficient de mic. Punctul de la infinit este pentru această funcție un punct ordinar. Originalul său este

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{n+k}}{k!\,(n+k)!}.$$

Această funcție poate fi pusă în legătură cu funcțiile lui Bessel de speța întîi și de ordin întreg. Cu schimbarea de variabilă $t = \left(\frac{\tau}{2}\right)^2$ seria devine

$$\left(\frac{\tau}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n J_n(\tau).$$

Revenind la vechea variabilă, obținem

$$f(t) = \sqrt{t^n}\,{}_nJ(2\sqrt{t}) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^{n+1}} \cdot e^{-\frac{1}{p}}\right).$$

În cazul particular $n = 0$,

$$\mathcal{L}J_0(2\sqrt{t}) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}.$$

Ținînd seama de acest rezultat, avem

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p} = J_0(2\sqrt{at}).$$

Rezultă că

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2} \frac{e^{-\frac{a}{p}}}{p}\right) = t * J_0(2\sqrt{at}) = \int_0^t (t-\tau) J_0(2\sqrt{a\tau})\,d\tau.$$

Se poate integra utilizînd dezvoltarea în serie a lui $J_0(2\sqrt{a\tau})$.

4° Scriem

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(p^2+a^2)^2}=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+a^2}\cdot\frac{1}{p^2+a^2}\right).$$

Ştim că

$$\frac{1}{p^2+a^2}=\mathcal{L}\,\frac{1}{a}\sin at.$$

Din teorema lui Borel rezultă

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(p^2+a^2)^2}=\frac{1}{a}\sin at*\frac{1}{a}\sin at=\frac{1}{a^2}\int_0^t\sin a\tau\cdot\sin a(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{\sin at}{2a^3}-\frac{t\cos at}{2a^2}.$$

V.9. Să se calculeze originalele funcţiilor

$$1^\circ\ \ln\frac{p+a}{p+b};\ 2^\circ\ \frac{1}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}},\quad a>0;\ 3^\circ\ \frac{\sqrt{p}}{p^3+\omega^2}.$$

R. 1° Această expresie se poate scrie $\ln(p+a)-\ln(p+b)$.
Avem

$$\frac{1}{p+a}=\frac{1}{p\left(1+\frac{a}{p}\right)}=\frac{1}{p}\left[1-\frac{a}{p}+\frac{a^2}{p^2}-\frac{a^3}{p^3}+\dots\right]=\frac{1}{p}-\frac{a}{p^2}+\frac{a^2}{p^3}-\frac{a^3}{p^4}+\dots$$

şi integrînd

$$\ln(p+a)=\ln p+\frac{a}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{p^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{p^3}+\dots$$

Rezultă

$$\ln(p+a)-\ln(p+b)=\frac{a}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{p^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3}{p^3}+\dots-\left(\frac{b}{p}-\frac{1}{2}\frac{b^2}{p^2}+\frac{1}{3}\frac{b^3}{p^3}-\dots\right),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\ln\frac{p+a}{p+b}=a-\frac{1}{2!}a^2t+\frac{1}{3!}a^3t^2+\dots-\left(b-\frac{1}{2!}b^2t-\frac{1}{3!}b^3t^2+\dots\right)=$$

$$=\frac{1-e^{-at}}{t}+\frac{e^{-bt}-1}{t}=\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}.$$

2° Integrala Mellin-Fourier se scrie în acest caz

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\sqrt{p}e^{pt}}{pe^{a\sqrt{p}}}\,dp.$$

Această funcție are o singularitate pentru $p = 0$, deci vom lua conturul lui Bromwich cu tăietura din fig. V.9 și considerăm integrala echivalentă

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_1}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}}\,dp + \int_{\gamma}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}}\,dp + \int_{C_2}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}}\,dp\right],$$

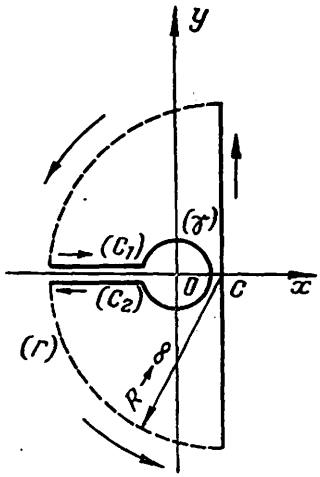


Fig. V.9

integrala pe cercul mare fiind nulă.

Pe cercul mic γ cu centrul în origine avem

$$p = \rho e^{i\theta},\quad dp = i\rho e^{i\theta}\,d\theta,$$

$$\int_{\gamma}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}}\,dp =$$

$$= \int_{\pi}^{-\pi}\frac{e^{\rho e^{i\theta}t}}{\sqrt{\rho}e^{\frac{i\theta}{2}}\cdot e^{a\sqrt{\rho}e^{\frac{i\theta}{2}}}}\cdot i\rho e^{i\theta}\,d\theta = i\int_{\pi}^{-\pi}\sqrt{\rho}f(\theta)d\theta$$

și

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}}\,dp = 0.$$

Pe partea de sus a tăieturii avem

$$p = re^{i\pi} = -r,\quad \sqrt{p} = i\sqrt{r},\quad dp = -dr,$$

deci

$$\int_{C_1}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}}\,dp = -\int_{R}^{\rho}\frac{e^{-rt}}{i\sqrt{r}e^{ai\sqrt{r}}}\,dr \xrightarrow[R\to\infty]{\rho\to 0} \int_{0}^{\infty}\frac{e^{-rt}e^{-ai\sqrt{r}}}{i\sqrt{r}}\,dr,$$

iar pe partea de jos a tăieturii

$$\int_{C_2}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}}\,dp \xrightarrow[R\to\infty]{\rho\to 0} \int_{0}^{\infty}\frac{e^{-rt}e^{ai\sqrt{r}}}{i\sqrt{r}}\,dr.$$

Rezultă

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} = \frac{2}{i}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-rt}}{\sqrt{r}}\cos a\sqrt{r}\,dr.$$

și

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2}{i}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-rt}}{\sqrt{r}}\cos a\sqrt{r}\,dr=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-rt}}{\sqrt{r}}\cos a\sqrt{r}\,dr.$$

Cu schimbarea de variabilă $a\sqrt{r}=\mu$, integrala devine

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\mu^2}{a^2}t}}{\frac{\mu}{a}}\cos\mu\cdot\frac{2\mu}{a^2}\,d\mu=\frac{-2}{a\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{\mu^2}{a^2}t}\cos\mu\cdot d\mu=-\frac{2}{a\pi}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

Deci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}}\,dp=-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{\sqrt{p}e^{a\sqrt{p}}}=-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

3°

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}\,dp.$$

Această funcție are ca puncte singulare polii simpli $p=\pm i\omega$ și punctul critic $p=0$. Considerăm conturul (Γ) din fig. V. 9 :

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_1}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}dp+\int_{C_2}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}dp+\int_{\Gamma}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}dp\right]+R_{i\omega}+R_{-i\omega},$$

unde

$$R_{i\omega}=\left.\frac{e^{pt}\sqrt{p}}{p+i\omega}\right|_{p=i\omega}=\frac{e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2i\sqrt{\omega}}\;;\;R_{-i\omega}=-\frac{e^{-i\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2i\sqrt{\omega}},$$

deci

$$R_{i\omega}+R_{-i\omega}=\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\int_{\gamma}\frac{e^{pt}\cdot\sqrt{p}}{p^2+\omega^2}\,dp\to 0 \text{ cînd raza cercului } \gamma,\ \rho\to 0.$$

Avem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}\,dp=\frac{1}{2\pi}\int_{\rho}^{R}\frac{e^{-rt}\sqrt{r}}{r^2+\omega^2}\,dr\xrightarrow[\rho\to\infty]{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\sqrt{r}\,e^{-rt}}{r^2+\omega^2}\,dr.$$

Analog

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{\sqrt{p}\,e^{pt}}{p^2+\omega^2}\,dp\xrightarrow[R\to\infty]{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\sqrt{r}\,e^{-rt}}{r^2+\omega^2}\,dr.$$

În rezultat

$$f(t))=\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sqrt{r}\,e^{-rt}}{r^2+\omega^2}\,dr.$$

V.10. Să se calculeze integralele

$$I_1=\int_0^\infty\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt;\quad I_2=\int_0^\infty\frac{J_0(t)-\cos t}{t}\,dt,$$

unde

$$J_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

R. Dacă $F(p)=\mathcal{L}f(t)$, atunci

$$\int_0^\infty F(p)\,dp=\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt\right]dp=\int_0^\infty\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt\,dp.$$

Inversînd ordinea de integrare, ceea ce este posibil, rezultă

$$\int_0^\infty F(p)\,dp=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}\,dt,\ \text{deoarece}\int_0^\infty e^{-pt}\,dp=\frac{1}{t}\cdot$$

Avem

$$\mathcal{L}(e^{-at}-e^{-bt})=\mathcal{L}e^{-at}-\mathcal{L}e^{-bt}=\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b},$$

deci

$$\int_0^\infty\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=\int_0^\infty\left(\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}\right)dp=\ln\frac{p+a}{p+b}\Big|_0^\infty=\ln\frac{b}{a}.$$

Știm că

$$\mathscr{L} t^n = \frac{n!}{p^{n+1}};$$

deci

$$\mathscr{L} J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{p^{2n+1}} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5. \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{p^{2n}} =$$

$$= \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

sau

$$\mathscr{L} J_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Rezultă

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{J_0(t) - \cos t}{t} \, dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{p}{1+p^2} \right) dp = \ln \frac{p + \sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}} \Bigg|_0^{\infty} = \ln 2.$$

V.11. Să se dezvolte în serie funcția $f(t)$ pentru care

$$F(p) = \mathscr{L} f(t) = \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{ap}{2}.$$

R. Funcția $f(t)$ este reprezentată în tabelă (v. pag. 237) la poziția 92 și este o funcție periodică de perioadă $2a$. Scriem

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} e^{pt} \frac{\operatorname{sh} \frac{ap}{2}}{\operatorname{ch} \frac{ap}{2}}.$$

Această funcție are punctele

$$p = 0, \quad p = \frac{(2k+1)\pi i}{a}, \quad k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

oli simpli.

Avem deci

$$\mathscr{L}^{-1} \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{ap}{2} = \sum \operatorname{Rez} \Phi(p) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{p_k t} \operatorname{sh} \frac{p_k a}{2}}{\frac{a}{2} \cdot p_k \operatorname{sh} \frac{p_k a}{2}} = \frac{2}{a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{p_k t}}{p_k}.$$

Rezultă deci

$$f(t) = \frac{2}{\pi i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(2k+1) i \frac{t}{a}}}{2k+1}, \quad k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots,$$

dezvoltarea în serie Fourier sub formă complexă a funcției $f(t)$. Trecînd la dezvoltarea în serie Fourier cu termeni reali avem

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \sin \frac{k\pi t}{a}, \quad (h = 1, 3, 5, 7, \ldots),$$

V.12. Să se calculeze coeficienții dezvoltării în serie Fourier a funcției $|\sin \omega t|$ utilizînd calculul operațional.

R. Aplicînd transformarea Carson-Laplace avem

$$L|\sin \omega t)| = \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} \coth \frac{p\pi}{2\omega}.$$

Funcția

$$\Phi(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} e^{pt} \coth \frac{p\pi}{2\omega} = \frac{\omega e^{pt}}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi}{2\omega}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi}{2\omega}}$$

are polii simpli $p = \pm i\omega$, $p_k = 2ki\omega$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Toți acești poli sînt pe axa imaginară la stînga dreptei de abscisă c. Apoi $\frac{G(p)}{p} \to 0$ cînd $|p| \to \infty$ și $t > 0$ unde $G(p) = L\,|\sin \omega t\,|$, deci

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\omega e^{pt}}{p^2 + \omega^2} \coth \frac{p\pi}{2\omega} = \sum \operatorname{Rez} \Phi(p).$$

Avem

$$\operatorname*{Rez}_{p=i\omega} \Phi(p) = \frac{\omega}{p + i\omega} e^{pt} \frac{1 + e^{-p\frac{\pi}{\omega}}}{1 - e^{-p\frac{\pi}{\omega}}} \Bigg|_{p=i\omega} = \frac{\omega}{2i\omega} e^{i\omega t} \frac{1 + e^{-i\pi}}{1 - e^{-i\pi}} = 0,$$

$$\operatorname*{Rez}_{p=-i\omega} \Phi(p) = 0,$$

$$\operatorname*{Rez}_{p=2ki\omega} \Phi(p) = \frac{\omega e^{pt} \operatorname{ch} p \frac{\pi}{2\omega}}{p_k(p^2 + \omega^2) \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{ch} p \frac{\pi}{2\omega}} \Bigg|_{p=2ki\omega} = \frac{e^{2ki\omega t}}{ki\omega k\,(1 - 4k^2)},$$

$$\operatorname*{Rez}_{p=0} \Phi(p) = \frac{\omega e^{pt} \left(1 + e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\right)}{(p^2 + \omega^2) \frac{d}{dp}\left(1 - e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\right)} \Bigg|_{p=0} = \frac{2}{\pi}.$$

Deci

$$f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi\omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2k\omega t}{k(1-4k^2)}.$$

V.13. Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 9x = 9e^{3t}$$

care satisface condiţiile iniţiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

R. Aplicînd operatorul $\mathcal{L}$ ambilor membri ai ecuaţiei şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale, avem

$$\mathcal{L}\frac{d^2x}{dt^2} + 6\mathcal{L}\frac{dx}{dt} + 9\mathcal{L}x = 9\mathcal{L}e^{3t}$$

sau

$$p^2X(p) + 6pX(p) + 9X(p) = 9\frac{1}{p-3},$$

unde $X(p) = \mathcal{L}x(t)$.

Rezultă

$$X(p) = \frac{9}{(p-3)(p+3)^2}.$$

Numitorul acestei funcţii are rădăcini multiple, deci aplicînd teorema de dezvoltare în acest caz, obţinem

$$x(t) = 9\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(p-3)(p+3)^2} = 9\left[\left.\frac{e^{pt}}{(p+3)^2}\right|_{p=3} + \left(\frac{e^{pt}}{p-3}\right)'_{p=-3}\right] =$$

$$= \frac{e^{3t} - (1+6t)e^{-3t}}{4}.$$

V.14. Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} = \sin t,$$

care satisface condiţiile iniţiale $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$.

R. Vom rezolva ecuaţia cu ajutorul transformării Carson-Laplace

$$Lx(t) = p\int_0^\infty x(t)e^{pt}\,dt.$$

Ecuaţia operaţională corespunzătoare este

$$p^3X(p) + pX(p) = \frac{p}{p^2+1},$$

de unde rezultă

$$X(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

După teorema lui Borel

$$L^{-1}\frac{1}{(p^2+1)^2} = L^{-1}\frac{\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}}{p} = (1-\cos t) * \sin t.$$

Avem

$$(1-\cos t) * \sin t = \int_0^t (1-\cos\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \sin(t-\tau)\,d\tau -$$

$$-\int_0^t \cos\tau\sin(t-\tau)\,d\tau = 1-\cos t - \frac{t}{2}\sin t.$$

Deci

$$x(t) = 1-\cos t - \frac{t}{2}\sin t.$$

V.15. Să se determine soluţia ecuaţiei

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

care satisface condiţiile $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

R. Notăm $\mathscr{L}y(x) = Y(p)$. Avem

$$\mathscr{L}\frac{d^2y}{dx^2} = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1,$$

$$\mathscr{L}\frac{dy}{dx} = -[pY(p)]' + y(0) = -pY'(p) - Y(p).$$

Ecuaţia operaţională corespunzătoare ecuaţiei date este

$$pY'(p) - (p^2-2)Y(p) = -1$$

sau

$$Y'(p) - \left(p - \frac{2}{p}\right)Y(p) = -\frac{1}{p}$$

ca soluţia

$$Y(p) = e^{\int\left(p-\frac{2}{p}\right)dp}\left[K - \int e^{-\int\left(p-\frac{2}{p}\right)dp} \cdot \frac{1}{p}\,dp\right] =$$

$$= \frac{e^{\frac{p^2}{2}}}{p^2}\left[k + e^{-\frac{p^2}{2}}\right] = \frac{K e^{\frac{p^2}{2}}}{p^2} + \frac{1}{p^2}.$$

Pentru $|p| \to \infty$ trebuie să avem

$$\lim_{|p|\to\infty} Y(p) = \lim_{x\to 0} y(x),$$

deci dacă impunem condiţia $y(0) = 0$, rezultă că $Y(p)$ trebuie să fie nul pentru $|p| \to \infty$, ceea ce implică $K = 0$, deci

$$Y(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Soluţia ecuaţiei date este

$$y(x) = x.$$

V.16. Să se determine soluţia ecuaţiei

$$xy'' + 2y' = x - 1$$

care satisface condiţia $y(0) = 0$.

R. Vom aplica operatorul lui Laplace ambilor membri ai ecuaţiei. Ţinînd seama de faptul că $y(0) = 0$, avem

$$\mathcal{L}y' = pY(p),\ \mathcal{L}xy'' = -2pY(p) - p^2Y'(p),\ \text{cu}\ Y(p) = \mathcal{L}y(x).$$

Ecuaţia devine

$$p^2Y'(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2},$$

de unde rezultă

$$Y(p) = \frac{1}{3p^3} - \frac{1}{2p^2},$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}Y(p) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^3} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^2} = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} = \frac{x(x-3)}{6}.$$

V.17. Să se integreze sistemul

$$\left.\begin{aligned} 3x' + 2x + y' &= 1 \\ x' + 4y' + 3y &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad x > 0,$$

cu condiţiile iniţiale $x(0) = y(0) = 0$.

R. Sistemul operaţional corespunzător este

$$\left.\begin{aligned} 3pX(p) + 2X(p) + pY(p) &= \frac{1}{p} \\ pX(p) + 4pY(p) + 3Y(p) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} (3p^2 + 2p)X(p) + p^2Y(p) &= 1 \\ pX(p) + (4p + 3)Y(p) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Soluţia acestui sistem este

$$X(p) = \frac{4p + 3}{p(11p^2 + 17p + 6)} = \frac{4}{11} \cdot \frac{p + \frac{3}{4}}{p\left(p + \frac{6}{11}\right)(p + 1)},$$

$$Y(p) = \frac{-p}{p(11p^2 + 17p + 6)} \frac{-1}{11\left(p + \frac{6}{11}\right)(p + 1)}.$$

Rezultă

$$x(t) = \frac{4}{11}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{p + \frac{3}{4}}{p\left(p + \frac{6}{11}\right)(p + 1)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t} - \frac{1}{5}e^{-t},$$

$$y(t) = -\frac{1}{11}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{\left(p + \frac{6}{11}\right)(p + 1)} = \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}\right).$$

V.18. Să se determine soluţia ecuaţiei integrale

$$x(t) + 2\int_0^t x(u)\mathrm{d}u = 3e^t + 2t.$$

R. Avem

$\mathcal{L}x(t) = X(p)$, $\mathcal{L}e^t = \dfrac{1}{p-1}$, $\mathcal{L}t = \dfrac{1}{p^2}$, şi după teorema de integrare a originalului

$$\mathcal{L}\int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{p}\,\mathcal{L}x(t) = \frac{X(p)}{p}.$$

Ecuaţia operaţională corespunzătoare ecuaţiei integrale este

$$X(p) + 2\frac{X(p)}{p} = \frac{3}{p-1} + \frac{2}{p^2}.$$

şi deci

$$X(p) = \frac{3p}{(p-1)(p+2)} + \frac{2}{p(p+2)}.$$

Rezultă că

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}X(p) = 1 + e^t + e^{-2t}.$$

V.19. Să se rezolve ecuaţia integrală

$$x(t) + 2\int_0^t x(u)du + 3\int_0^t\int_0^\lambda x(\mu)\,d\mu\,d\lambda = t.$$

R. Avem

$$\mathcal{L}x(t) = X(p),\quad \mathcal{L}\int_0^t x(u)du = \frac{X(p)}{p},\quad \mathcal{L}\int_0^t\int_0^\lambda x(\mu)\,d\mu\,d\lambda = \frac{X(p)}{p^2}.$$

Deci ecuaţia operaţională corespunzătoare este

$$X(p) + 2\frac{X(p)}{p} + 3\frac{X(p)}{p} = \frac{1}{p^2},$$

de unde rezultă

$$X(p) = \frac{1}{p^2+2p+3}.$$

Soluţia ecuaţiei integrale va fi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^2+2p+3} = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{2}}\sin 2\sqrt{2}\,t.$$

V.20. Să se rezolve ecuaţia integrală de tip Volterra

$$x(t) = a\sin bt + c\int_0^t \sin b(t-u)\cdot x(u)\,du,\quad 0<c<b.$$

R. Ecuaţia se poate scrie sub forma

$$x(t) - c\int_0^t x(u)\sin b(t-u)\,du = a\sin bt.$$

Avem

$$\mathcal{L}a \sin bt = \frac{ab}{p^2 + b^2}, \text{ iar după teorema lui Borel}$$

$$\mathcal{L}\int_0^t x(u) \sin b(t-u)\,du = \mathcal{L}[x(t) * \sin bt] = \frac{X(p)\cdot b}{p^2+b^2}.$$

Ecuaţia operaţională va fi

$$X(p) - \frac{cb}{p^2+b^2}X(p) = \frac{ab}{p^2+b^2},$$

de unde rezultă

$$X(p) = \frac{ab}{p^2+b^2-cb}.$$

Notînd $b^2 - bc = \omega^2$, deoarece $0 < c < b$,

$$X(p) = \frac{ab}{p^2+\omega^2}.$$

Rezultă

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}X(p) = \frac{ab}{\omega}\sin \omega t = \frac{ab}{\sqrt{b^2-bc}}\sin\sqrt{b^2-bc}\,t.$$

V.21. Să se rezolve ecuaţia integrală de tip Volterra

$$\sin t = t + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}(t-\tau)\,d\tau.$$

R. Avem formula lui Duhamel

$$pF(p)\,G(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\,g(0) + \int_0^t f(\tau)\,g'(t-\tau)d\tau\right],$$

deci

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}(t-\tau)\,d\tau\right] = pX(p)\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{X(p)}{p}.$$

Ecuaţia operaţională va fi

$$\frac{1}{1+p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{X(p)}{p},$$

de unde

$$X(p) = \frac{p}{1+p^2} - \frac{1}{p}.$$

Soluţia ecuaţiei date va fi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}X(p) = \cos t - 1.$$

V.22. O tensiune electromotoare constantă E este aplicată la timpul $t = 0$ unui circuit electric format dintr-o inductanţă L, o capacitate C şi o rezistenţă r, în serie (fig. V.22). La timpul $t = 0$ sarcina la bornele condensatorului este nulă şi curentul în circuit egal. Să se dea expresia curentului în funcţie de timp.

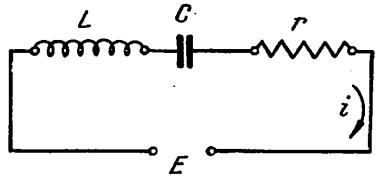


Fig. V.22

R. Ecuaţia diferenţială a sistemului este

$$L\frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} = E \tag{1}$$

la care se adaugă

$$\frac{dq}{dt} = i, \tag{2}$$

unde i este curentul în circuit iar q sarcina instantanee a condensatorului. Notăm

$$I(p) = \mathcal{L}i(t),\ Q(p) = \mathcal{L}q(t).$$

Cu condiţiile iniţiale

$$i(0) = 0,\ q(0) = 0,$$

ecuaţiile (1) şi (2) devin

$$\left.\begin{aligned} Lp\,I + rI + \frac{Q}{C} &= E \\ pQ &= I \end{aligned}\right\}.$$

Înlocuind pe Q din ecuaţia a doua în prima, obţinem ecuaţia

$$LpI + rI + \frac{I}{pC} = E,$$

de unde

$$I = \frac{E}{L\left(p + \frac{r}{L} + \frac{1}{pLC}\right)} = \frac{E}{L}\cdot\frac{p}{p^2 + 2ap + \omega_0^2},$$

unde $a = \frac{r}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Avem

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} I(p) = \mathcal{L}^{-1} \frac{E}{L} \cdot \frac{p}{p^2+2ap+\omega_0^2} = \frac{E}{L} \mathcal{L}^{-1} \frac{p}{p^2+2ap+\omega_0^2},$$

deci

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E}{L} e^{-at} \sin \omega t, & \text{dacă } \omega^2 > a^2, \\ \frac{E}{L} te^{-at}, & \text{dacă } \omega^2 = a^2, \\ \frac{E}{L} \frac{1}{n-m} (e^{-nt} - e^{-mt}), & \text{dacă } \omega^2 < a^2, \end{cases}$$

unde $(-m)$ și $(-n)$ sînt rădăcinile ecuației $p^2 + 2ap + \omega_0^2 = 0$ iar $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}$.

V.23. Mișcarea unui electron supus unui cîmp electric $\vec{E}$ și unui cîmp magnetic $\vec{H}$ satisface ecuația diferențială vectorială

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{|e|}{m}(\vec{E} + \mu_0 \vec{v} \Delta \vec{H}).$$

unde $\vec{v}$ este viteza electronului, m masa sa, μ_0 coeficientul de permiabilitate magnetică în vid și $|e|$ valoarea absolută a sarcinii sale. Să se determine traiectoria electronului supus celor două cîmpuri.

R. Vom considera cazul particular pentru $\vec{E}$ și $\vec{H}$ uniforme și perpendiculare. Alegem un triedru de referință trirectangular $Oxyz$ cu Oz paralel la $\vec{E}$ și Oy paralel cu $\vec{H}$ (fig.V.23, *a*). Avem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu_0 \frac{|e|}{m} \cdot \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{|e|}{m} E - \mu_0 \frac{|e|}{m} H \frac{dx}{dt}.$$

Presupunem că la timpul $t = 0$ electronul se află în origine fără viteză inițială. Notăm $X(p) = \mathcal{L}x(t)$, $Y(p) = \mathcal{L}y(t)$, $Z(p) = \mathcal{L}z(t)$, $\omega = \mu_0 \frac{|e|}{m} H$, $\alpha = \frac{|e|}{m} E$.

Ecuaţiile operaţionale corespunzătoare ecuaţiilor (1) sînt

$$\left.\begin{aligned} p^2X - \omega pZ &= 0 \\ Y &= 0 \\ p^2Z - \frac{\alpha}{p} + pX\omega &= 0 \end{aligned}\right\}$$

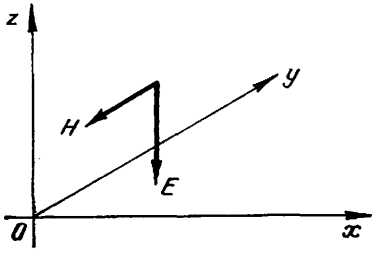


Fig. V.23, *a*

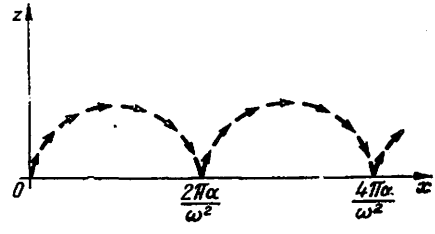


Fig. V.23, *b*

de unde rezultă

$$X(p) = \frac{\alpha\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}, \qquad Y=0, \qquad Z = \frac{\alpha}{p(p^2+\omega^2)}.$$

Originalele acestor funcţii sînt

$$x(t) = \frac{\alpha}{\omega^2}(\omega t - \sin\omega t),$$

$$y(t) = 0,$$

$$z(t) = \frac{\alpha}{\omega^2}(1 - \cos\omega t).$$

Traiectoria electronului este cicloida din planul xOz (fig. V.23, *b*).

V.24. O particulă de masă m se deplasează fără frecare de-a lungul unei axe. Ea este atrasă spre un punct numit origine cu o forţă proporţională cu distanţa de la această masă la origine şi este supusă unei forţe $f(t)$. Să se determine mişcarea particulei (trasînd eventual curba x în funcţie de t, unde x este distanţa de la particulă la origine) în diferite cazuri, presupunînd că la timpul $t = 0$ particula este în repaus, adică $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

R. În cazul general ecuaţia diferenţială de mişcare a particulei este

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t). \tag{1}$$

Ecuaţia operaţională este

$$mp^2X(p) + kX(p) = \mathscr{L}f(t). \tag{2}$$

1° Dacă $f(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < 0, \\ F_0, \text{ pentru } t > 0. \end{cases}$

ecuaţia (2) devine

$$(mp^2 + k)\, X(p) = \frac{F_0}{p},$$

de unde

$$X(p) = \frac{F_0}{p(mp^2 + k)} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{\frac{k}{m}}{p^2 + \frac{k}{m}},$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \cdot \mathscr{L}^{-1} \frac{\frac{k}{m}}{p\left(p^2 + \frac{k}{m}\right)} = \frac{F_0}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right),$$

iar curba este reprezentată în fig. V.24, *a*,

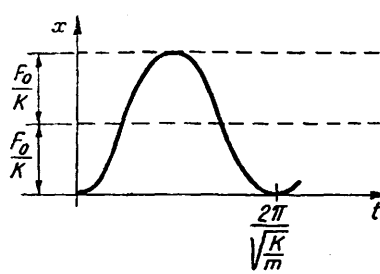


Fig. V.24, *a*

2° $f(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < 0, \\ F_0 \sin \omega t, \text{ pentru } t > 0. \end{cases}$

Ecuaţia (2) se scrie

$$(mp^2 + k)X(p) = F_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

deci

$$X(p) = \frac{F_0}{m} \frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)\left(p^2 + \frac{k}{m}\right)}.$$

Soluția ecuației (1) va fi în acest caz

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)\left(p^2+\frac{k}{m}\right)} = \frac{F_0\omega}{m}\cdot\frac{\omega\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \sqrt{\frac{k}{m}}\sin\omega t}{\omega\sqrt{\frac{k}{m}}\left(\omega^2-\frac{k}{m}\right)} =$$

$$= \frac{F_0\omega}{m}\cdot\frac{\omega}{\frac{k}{m}-\omega^2}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega} - \frac{\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\right].$$

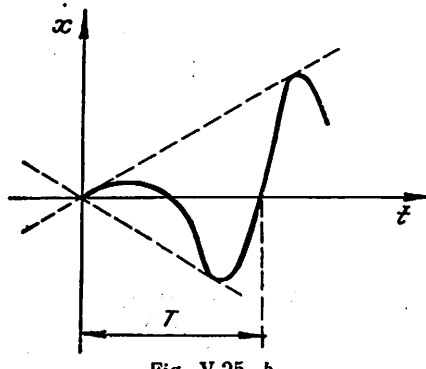


Fig. V.25, *b*

Dacă se dă în problemă $\omega = \frac{k}{m}$, pulsația forței impuse este egală cu cea a sistemului și sîntem în cazul rezonanței. Atunci

$$X(p) = \frac{F_0}{m}\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$$

și

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega^2}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t).$$

În acest caz curba este cea din fig. V.24, *b*.

3° Dacă

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < 0, \\ F_0, \text{ pentru } 0 < t < a, \\ 0, \text{ pentru } t > a, \end{cases}$$

ecuaţia operaţională este

$$(mp^2 + k)\,X(p) = \frac{F_0(1 - e^{-pa})}{p},$$

deci

$$X(p) = \frac{F_0}{m}\,\frac{1 - e^{-pa}}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{F_0}{m}\left[\frac{1}{p(p^2 + \omega_0^2)} - \frac{e^{-pa}}{p(p^2 + \omega_0^2)}\right],$$

$$\mathcal{L}^{-1}\,\frac{1}{p(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1 - \cos\omega_0 t}{\omega_0^2},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\,\frac{e^{-pa}}{p(p^2 + \omega_0^2)} = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < a, \\ \dfrac{1 - \cos\omega_0(t - a)}{\omega_0^2}, \quad \text{pentru } t > a. \end{cases}$$

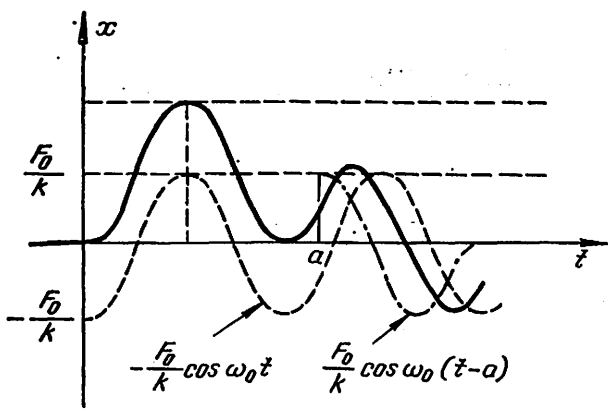


Fig. V.24, *c*

Rezultă

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0, \\ \dfrac{F_0}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right), & \text{pentru } 0 < t < a, \\ \dfrac{F_0}{k}\,[\cos\omega_0(t - a) - \cos\omega_0 t], & \text{pentru } t > a. \end{cases}$$

Curba se obţine imediat, utilizînd mai ales rezultatele de la 1° (fig. V.24, *c*).

4°

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < a, \\ F_0, \text{ pentru } a < t < b, \\ 0, \text{ pentru } t > b. \end{cases}$$

Ecuaţia operaţională (2) se scrie

$$(mp^2 + k)\, X(p) = F_0 \frac{e^{-pa} - e^{-pb}}{p}$$

$$X(p) = \frac{F_0}{m} \left[\frac{e^{-pa} - e^{-pb}}{p(p^2 + \omega_0^2)} \right] \text{ cu } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

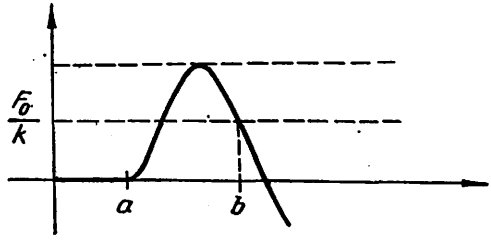


Fig. V.24, *d*

Cu ajutorul rezultatului de la punctul 3°, obţinem imediat

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0, \\ \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_0 (t - a)], & \text{pentru } a < t < b, \\ \frac{F_0}{k} [\cos \omega_0 (t - b) - \cos \omega_0 (t - a)], & \text{pentru } t > b. \end{cases}$$

Variaţia acestei funcţii este reprezentată în fig. V.24, *d*.

5°

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < 0, \\ \frac{F_0}{a} t, \text{ pentru } 0 < t < a, \\ F_0, \text{ pentru } a < t; \end{cases}$$

$$\mathcal{L} f(t) = \frac{F_0}{a} \cdot \frac{1 - e^{-pa}}{p^2}.$$

Avem deci

$$mp^2 X(p) + kX(p) = \frac{F_0}{a} \frac{1 - e^{-ap}}{p^2},$$

de unde

$$X(p) = \frac{F_0}{am} \frac{1 - e^{-ap}}{p^2(p^2 + \omega_0^2)}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m};$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p^2(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2} t - \frac{1}{\omega_0^3} \sin \omega_0 t.$$

Aplicînd teorema întîrzierii, obţinem

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{e^{-ap}}{p(p^2 + \omega_0^2)} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < a, \\ \frac{1}{\omega_0^2}(t - a) - \frac{1}{\omega_0^3} \sin \omega_0 (t - a), & \text{pentru } t > a. \end{cases}$$

Rezultă

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0, \\ \frac{F_0}{ak}\left[t - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0}\right]; & \text{pentru } 0 < t < a, \\ \frac{F_0}{ak}\left[a + \frac{\sin \omega_0 (t - a) - \sin \omega_0 t}{\omega_0}\right], & \text{pentru } a > t. \end{cases}$$

6° Dacă

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t < 0, \\ F_0 \sin \omega t, & \text{pentru } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ 0, & \text{pentru } \frac{\pi}{\omega} < t; \end{cases}$$

$$\mathcal{L} f(t) = F_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\left(1 + e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\right)$$

Ecuaţia (2) se scrie

$$(mp^2 + k)X(p) = F_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\left(1 + e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\right).$$

de unde

$$X(p) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega\left(1 + e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\right)}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + \omega_0^2)}, \quad \text{cu } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

a) Presupunem $\omega \neq \omega_0$.

În acest caz

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)}=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0.\\ \dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\left[\dfrac{\sin\omega t}{\omega}-\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right]; & \text{pentru } t>0,\end{cases}$$

Din teorema întîrzierii rezultă

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\omega e^{-p\frac{\pi}{\omega}}}{(p^2+\omega^2)(p^2+\omega_0^2)}=\begin{cases}0. & \text{pentru } t<0,\\ \dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\left[\dfrac{\sin\omega t}{\omega}-\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right], & \text{pentru } t>0.\end{cases}$$

Soluția ecuației (1) este

$$x(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ \dfrac{F_0}{m}\dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\left[\dfrac{\sin\omega t}{\omega}-\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right] & \text{pentru } 0<t<\dfrac{\pi}{\omega},\\ \dfrac{F_0}{m}\dfrac{\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\left[\dfrac{2}{\omega_0}\sin\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega_0 t-\dfrac{\omega_0}{\omega}\dfrac{\pi}{2}\right)\right., & \text{pentru } \dfrac{\pi}{\omega}<t.\end{cases}$$

b) Dacă $\omega=\omega_0$ (rezonanță),

$$X(p)=\frac{F}{m}\cdot\frac{\omega_0\left(1+e^{-p\frac{\pi}{\omega}}\right)}{(p^2+\omega_0^2)^2}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\omega_0}{(p^2+\omega_0^2)^2}=\frac{1}{2\omega_0^2}(\sin\omega_0 t-\omega_0 t,\ \cos\omega_0 t),\ \text{pentru } t>0,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{\omega_0 e^{-p\frac{\pi}{\omega_0}}}{(p^2+\omega_0^2)^2}=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<\dfrac{\pi}{\omega_0},\\ \dfrac{1}{2\omega_0^2}[(\omega_0 t-\pi)\cos\omega_0 t-\sin\omega_0 t], & \text{pentru } t>\dfrac{\pi}{\omega_0}.\end{cases}$$

Rezultă

$$x(t)=\begin{cases}0, & \text{pentru } t<0,\\ \dfrac{F_0}{2k}(\sin\omega_0 t-w_0 t\cos\omega_0 t), & \text{pentru } 0<t<\dfrac{\pi}{\omega_0},\\ -\dfrac{F_0}{2k}\pi\cos\omega_0 t, & \text{pentru } t>\dfrac{\pi}{\omega_0},\end{cases}$$

V.25. Se consideră pendulele cuplate din fig. V.25. Ecuațiile lui Newton sînt

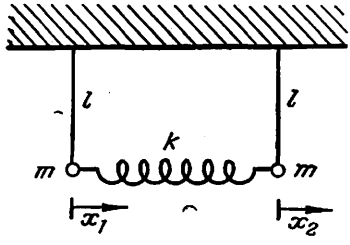


Fig. V.25

$$m\ddot{x}_1 = \frac{-mg}{l}x_1 + k(x_2 - x_1),$$

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{l}x_2 + k(x_1 - x_2).$$

Se se determine x_1 și x_2 dacă avem condițiile inițiale $x_1 = x_2 = 0$, $x_1 = v$, $\dot{x}_2 = 0$ la $t = 0$.

R. Fie $\mathscr{L}x_i(t) = F_i(p)$. Ecuațiile transformate sînt

$$m(p^2F_1 - v) = -\frac{mg}{l}F_1 + k(F_2 - F_1),$$

$$mp^2F_2 = \frac{mg}{l}F_2 + k(F_1 - F_2).$$

De aici rezultă

$$F_1(p) = \frac{v\left(p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)}{\left(p^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right)\left(p^2 + \frac{g}{l}\right)} = \frac{v}{2}\left(\frac{1}{p^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} + \frac{1}{p^2 + \frac{g}{l}}\right),$$

$$F_2(p) = \frac{kv}{m\left(p^2 + \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right)\left(p^2 + \frac{g}{l}\right)}.$$

Avem

$$x_1(t) = \mathscr{L}^{-1}F_1(p) = \frac{v}{2}\left(\frac{\sin\sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}\,t}{\sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}} + \frac{\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\right)$$

și

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1} F_2(p) = \frac{v}{2}\left(- \frac{\sin \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}\, t}{\sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}} + \frac{\sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \right).$$

V.26. Să se studieze comportarea unui galvanometru cu cadru mobil (fig. V.26) ale cărui ecuații diferențiale sînt

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2} + A\frac{d\alpha}{dt} + B\alpha = \Phi_0 i,$$

$$Ri + \Phi_0 \frac{d\alpha}{dt} = e(t)$$

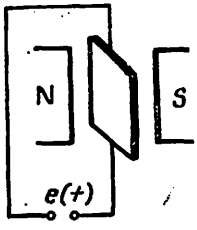


Fig. V.26

în condițiile

1° $\alpha(0) = 0,\ \alpha'(0) = 0,\ e(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } t < 0, \\ E_0, \text{ pentru } t > 0 \end{cases}$

2° $\alpha(0) = 0,\ \alpha'(0) = \omega_0,\ e(t) = 0.$

R. 1° Notăm $\mathcal{L}\,\alpha(t) = \Theta(p)$ și $\mathcal{L} i = I(p)$.

Ținînd seama de condițiile inițiale, avem

$$\mathcal{L}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = p^2\,\Theta(p),\ \mathcal{L}\frac{d\alpha}{dt} = p\,\Theta(p) \text{ și } \mathcal{L}e(t) = \frac{E_0}{p}, \text{ pentru } t > 0.$$

Ecuațiile operaționale sînt

$$\left.\begin{aligned} Kp^2\Theta + Ap\Theta + B\Theta &= \Phi_0 I \\ RI + P\Phi_0\Theta &= \frac{E_0}{p} \end{aligned}\right\}$$

Notînd $D = A + \frac{\Phi_0^2}{R}$, obținem

$$\Theta(p) = \Phi_0 \frac{E_0}{R} \cdot \frac{1}{p(Kp^2 + pD + B)};$$

Avem următoarele cazuri de considerat:

a) $D^2 - 4BK > 0$ (regim neperiodic).

În aceste condiții trinomul $Kp^2 + pD + B$ se anulează pentru două valori reale și distincte $-m$ și $-n$, deci

$$\Theta(p) = \Phi_0 \frac{E_0}{RK} \cdot \frac{1}{p(p+m)(p+n)}.$$

Aplicînd transformarea inversă și ținînd seama de faptul că $\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p-\lambda} = e^{\lambda t}$,

rezultă

$$\alpha(t) = \frac{\Phi_0 E_0}{RKmn}\left[1 + \frac{me^{-nt} - ne^{-mt}}{n-m}\right]$$

sau

$$\alpha(t) = \frac{\Phi_0 E_0}{RB}\left[1 - \frac{e^{-\frac{D}{2k}t}}{\sqrt{D^2-4BK}}\left(D \operatorname{sh} \frac{\sqrt{D^2-4BK}}{2K}t + \sqrt{D^2-4BK} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{D^2-4BK}}{2K}t\right)\right].$$

b) $D^2 - 4BK = 0$ (regim critic).

În acest caz avem

$$\Theta(p) = \frac{\Phi_0 E_0}{RK} \frac{1}{p\left(p + \frac{D}{2K}\right)^2},$$

iar

$$\alpha(t) = \Phi_0 \frac{4E_0 K}{RD^2}\left[1 - e^{-\frac{DT}{2K}}\left(1 + \frac{Dt}{2K}\right)\right].$$

Înlocuind $\frac{4K}{D^2} = \frac{1}{B}$, deoarece $4BK = D^2$, rezultă

$$\alpha(t) = \frac{\Phi_0 E_0}{RB}\left[1 - e^{-\frac{D}{2K}t}\left(1 + \frac{D}{2K}t\right)\right].$$

c) $D^2 - 4BK < 0$ (regim periodic).

În acest caz punînd $\operatorname{tg} \Phi = \frac{\sqrt{4BK - D^2}}{D}$, rezultă

$$\alpha(t) = \frac{\Phi_0 E_0}{RB}\left[1 - \frac{2\sqrt{KB}}{\sqrt{4BK - D^2}} e^{-\frac{D}{2K}t} \sin\left(\frac{\sqrt{4BK - D^2}}{2K} t + \Phi\right)\right].$$

2° Cu aceleași notații ca la punctul 1° avem

$$\mathscr{L}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = (p^2\Theta - \omega_0)\mathscr{L}\frac{d\alpha}{dt} = p\Theta,$$

iar ecuațiile operaționale sînt

$$\left.\begin{aligned} &K(p^2\Theta - \omega_0) + Ap\Theta + B\Theta = \Phi_0 I \\ &RI + p\Phi_0\Theta = 0 \end{aligned}\right\}$$

de unde

$$\Theta = \frac{\omega_0}{p^2 + \frac{D}{K}p + \frac{B}{K}} \text{ cu } D = A + \frac{\Phi_0^2}{R}.$$

a) Dacă $D^2 - 4BK > 0$, trinomul $p^2 + \frac{D}{K}p + \frac{B}{K}$ se anulează pentru două valori reale și distincte $-m$ și $-n$ și deci

$$\Theta = \frac{\omega_0}{(p + m)(p + n)}.$$

Aplicînd transformarea inversă, avem

$$\alpha(t) = \mathscr{L}^{-1}\Theta = \frac{\omega_0}{n - m}(e^{-mt} - e^{-nt})$$

sau

$$\alpha(t) = \frac{2K\omega_0}{\sqrt{D^2 - 4BK}} e^{-\frac{D}{2K}t} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{D^2 - 4BK}}{2K} t.$$

b) Dacă $D^2 - 4BK = 0$, avem

$$\Theta = \frac{\omega_0}{\left(p + \frac{D}{2K}\right)^2},$$

de unde rezultă

$$\alpha(t) = \omega_0 t e^{\frac{D}{2K}t}.$$

c) Dacă $D^2 - 4BK < 0$, obţinem

$$\alpha(t) = \frac{2K\omega_0 e^{-\frac{D}{2K}t}}{\sqrt{4BK - D^2}} \sin \frac{\sqrt{4BK - D^2}}{2K} t.$$

Capitolul VI

FUNCȚII ȘI ECUAȚII SPECIALE

Definiția 1. *Funcția* $\Gamma(z)$ *sau funcția eulerană de speța a doua poate fi definită pentru toate valorile reale sau complexe ale lui z prin relația*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right], \tag{1}$$

γ *fiind constanta lui Euler* :

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}57721566490 \ldots$$

Definiția 2. *Funcția* $\Gamma(z)$ *se mai poate defini ca fiind*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \to \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!\, n^z}$$

pentru orice z finit.

Definiția 3. *Putem defini funcția* $\Gamma(z)$ *prin următoarea integrală definită* :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt, \text{ cu } \operatorname{Re}(z) > 0. \tag{2}$$

Vom da cîteva proprietăți ale funcției $\Gamma(z)$.

1° Pentru orice z finit există relaţia

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

2° Oricare ar fi numărul natural n,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

3° Pentru funcţia $\Gamma(z)$ avem ecuaţia complementelor

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)\frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Definiţie. *Funcţia lui Euler de prima speţă $B(p, q)$, de variabilele complexe p şi q, este definită de relaţia*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \ \mathrm{Re}\,(p) > 0, \ \mathrm{Re}\,(q) > 0. \tag{3}$$

Avem următoarele relaţii :

$$B(p, q) = B(q, p). \tag{4}$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{5}$$

$$pB(p, q+1) = qB(p+1, q). \tag{6}$$

Funcţiile lui Bessel de speţa întîi şi a doua de ordinul ν sînt soluţii particulare ale ecuaţiei diferenţiale

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{7}$$

unde ν este un parametru real sau complex. Variabila x ia valori reale sau complexe.

Definiţie. *Funcţia $J_\nu(x)$ se numeşte funcţia lui Bessel de prima speţă şi de ordinul ν şi*

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\nu}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{8}$$

Soluţia generală a ecuaţiei lui Bessel pentru $\nu \neq n$ întreg este de forma

$$y = C_1J_\nu(x) + C_2J_{-\nu}(x) \ (C_1, C_2 = \text{const.}) \tag{9}$$

unde $J_\nu(x)$ se obţine din $J_{-\nu}(x)$ prin înlocuirea lui ν cu $-\nu$.

Dacă $\nu = n$ întreg, ecuaţia Bessel admite în afara unui factor constant o singură soluţie de forma (7).

Definiţie. *Funcţia* $Y_\nu(x)$ *definită prin egalităţile*

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi\nu}\,[J_\nu(x)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)],\ \nu \neq n,\ (n = \text{întreg}),$$

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right],\quad \nu = n,\ (n = \text{întreg}), \tag{10}$$

se numeşte funcţia lui Bessel de speţa a doua şi de ordinul ν.

Integrala generală a ecuaţiei lui Bessel se poate scrie, oricare ar fi ν, sub forma

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x),\ (C_1,\ C_2 = \text{const}). \tag{11}$$

Definiţie. *Funcţiile* $H_\nu^{(1)}(x)$ şi $H_\nu^{(2)}(x)$ *definite prin relaţiile*

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + \mathrm{i}Y_\nu(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - \mathrm{i}Y_\nu(x), \end{aligned} \tag{21}$$

se numesc funcţiile lui Bessel de speţa a treia sau funcţiile lui Hankel.

Avem următoarele relaţii de recurenţă între funcţiile lui Bessel de aceeaşi speţă şi de ordine care diferă prin cîte o unitate. Fie $y_\nu(x)$ o soluţie oarecare a ecuaţiei Bessel (7). Avem

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[x^\nu y_\nu(x)] &= x^\nu y_{\nu-1}(x), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[x^{-\nu} y_\nu(x)] &= -\,x^{-\nu} y_{\nu+1}(x), \end{aligned} \tag{13}$$

sau relaţii echivalente cu acestea

$$y_{\nu-1}(x) + y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\,y_\nu(x),\ y_{\nu-1}(x) - y_{\nu+1}(x) = 2y'_\nu(x). \tag{13'}$$

Funcţiile $J_n(x)$ admit şi următoarea reprezentare

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\,\theta. \tag{14}$$

Definiţie. *Se numeşte funcţia lui Bessel de prima speţă, modificată, funcţia*

$$I_\nu(x) = \mathrm{i}^{-\nu}\cdot J_\nu(\mathrm{i}x),\quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

Definiţie. *Numim funcţia lui Bessel de speţa a doua, modificată, funcţia*

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\pi \frac{I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}.$$

Definiţie. *Polinoamele lui Legendre $P_n(x)$, pentru valori reale sau complexe ale variabilei x, se definesc cu ajutorul formulei*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Folosihd formula binomului

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2(n-k)}$$

rezultă

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k \cdot (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

Polinoamele lui Legendre formează un sistem ortogonal de funcţii în intervalul $(-1,1)$ *cu ponderea* $\rho(x) = 1$*.

Funcţia generatoare a polinoamelor Legendre este

$$w(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

unde valoarea rădăcinii pentru $t = 0$ este luată egală cu unitatea.

Avem următoarele relaţii de recurenţă :

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x),$$

$$P_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) - P_n(x) = 0,$$

$$nP_n(x) + xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0,$$

$$(n+1)P_n(x) + xP'_n(x) - P'_{n+1}(x) = 0,$$

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x).$$

---

* Un sistem de funcţii $\{f_n(x)\}$ definite pe un interval (α, β) formează în acest interval un sistem ortogonal cu ponderea $\rho(x)$ dacă

$$\int_\alpha^\beta \rho(x) f_n(x) f_m(x) dx = \begin{cases} 0, \text{ pentru } m \neq n, \\ A, \text{ pentru } m = n. \end{cases}$$

Teorema 1. *Fie $f(x)$ o funcție reală oarecare, definită în intervalul $(-1, 1)$ și satisfăcînd condițiile:*

1° *$f(x)$ este o funcție netedă pe porțiuni în intervalul deschis $(-1, 1)$;*

2° *integrala $\int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x$ are o valoarea finită, atunci $f(x)$ se poate dezvolta în serie de polinoame Legendre*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \quad -1 < x < 1,$$

coeficienții c_n fiind dați de relațiile

$$c_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Definiție. *Polinoamele lui Hermite $H_n(x)$ pot fi definite cu ajutorul relației*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n e^{-x^2}}{\mathrm{d}x^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Avem

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-2k)!}(x)^{n-2k}.$$

Funcția generatoare a polinoamelor Hermite este

$$w(x, t) = e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \; |t| < \infty.$$

Relații de recurență:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$
$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x),$$
$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Polinoamele lui Hermite sînt ortogonale în intervalul $(-\infty, +\infty)$ cu ponderea $\rho(x) = e^{-x^2}$.

Teorema 2. *Fie $f(x)$ o funcţie reală oarecare, definită în intervalul $(-\infty, +\infty)$ şi care satisface condiţiile:*

1° *$f(x)$ este netedă pe porţiuni în orice interval finit $(-a, a)$;*

2° *integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} f^2(x)\, dx$ are o valoare finită.*

În aceste condiţii $f(x)$ se poate dezvolta în serie de polinoame Hermite

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x),$$

cu coeficienţii

$$c_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} H_n(x)\, dx.$$

Atît în cazul teoremei 1, cît şi a teoremei 2, în punctele de discontinuitate valoarea sumei este

$$\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)].$$

Polinoamele Laguerre $L_n^\alpha(x)$, pentru orice valori reale ale lui $\alpha > -1$, se definesc prin formula

$$L_n^\alpha(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Expresia generală pentru polinomul de gradul n se obţine aplicînd regula lui Leibniz care èonduce la o relaţie de forma

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \cdot \frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}.$$

Polinoamele lui Laguerre sînt ortogonale în intervalul $(0, \infty)$ cu ponderea $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$.

Aceste polinoame se pot reprezenta ca coeficienţi ai dezvoltării în seria funcţiei generatoare

$$w(x, t) = (1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{tx}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x)\, t^n, \quad |t| < 1.$$

Relaţii de recurenţă:

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x)+(x-\alpha-2n-1)L_n^{\alpha}(x)+(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x)=0,$$

$$\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}-\frac{dL_{n-1}^{\alpha}(x)}{dx}+L_{n-1}^{\alpha}(x)=0,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$(x-n-1)\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}+(n+1)\frac{dL_{n+1}^{\alpha}(x)}{dx}+(2n+2+\alpha-x)L_n^{\alpha}(x)-$$

$$-(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x)=0,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$x\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}=nL_n^{\alpha}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x),\quad n=1,2,\ldots,$$

$$L_n^{\alpha+1}(x)-L_{n-1}^{\alpha+1}(x)=L_n^{\alpha}(x),\quad n=1,2,\ldots$$

Definiţie. *Polinoamele lui Cebîşev $T_n(x)$ sînt polinoame ortogonale cu ponderea $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pe intervalul $(-1,+1)$.*

Avem

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k}x^{n-2k}(1-x^2)^k.$$

Toate zerourile lui $T_n(x)$ sînt reale şi cuprinse între -1 şi $+1$. Zeroul x_i de rangul i este dat de formula

$$x_i=\cos(2i-1)\frac{\pi}{2n},\qquad (i=1,2,3,\ldots,n).$$

Funcţia generatoare a polinoamelor lui Cebîşev este $\frac{1-\xi x}{1-2\xi x+\xi^2}$.

Avem

$$\tau(\xi,x)=\frac{1-\xi x}{1-2\xi x+\xi^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n T_n(x),\ |\xi|<1.$$

Între polinoamele lui Cebîşev există relaţia de recurenţă

$$T_{n+1}(x)-2nT_n(x)+T_{n-1}(x)=0;\ n=1,2,2,\ldots$$

PROBLEME

VI.1. Să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,dx,\ a>0,\ b>0,\ np>m+1>0.$$

R. Avem

$$I=\int_0^\infty \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,dx = a^{-p}\int_0^\infty \frac{x^m}{\left(1+\frac{b}{a}x^n\right)^p}\,dx.$$

Facem substituția $\frac{b}{a}x^n=u$;

$$I=\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int_0^\infty u^{\frac{m+1}{n}-1}(1+u)^{-p}\,du=\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}B\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right)=$$

$$=\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\Gamma\left(p-\frac{m+1}{n}\right)}{\Gamma(p)}.$$

VI.2. Să se demonstreze relația lui Euler

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt=\frac{\Gamma(z)}{\lambda^z}\cos\alpha z,\left(\lambda>0,\ t>0,\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

R. Înlocuind pe $\cos(\lambda t\sin\alpha)$ cu relația

$$\cos(\lambda t\sin\alpha)=\frac{e^{i\lambda t\sin\alpha}+e^{-i\lambda t\sin\alpha}}{2},$$

obținem

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\,dt+\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\,dt\right].$$

Făcînd în prima integrală substituţia $t = \dfrac{u(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{\lambda}$, obţinem

$$\int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-\lambda t(\cos\alpha - i\sin\alpha)}\, dt = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}e^{-u}(\cos\alpha z + i\sin\alpha z)}{\lambda^z}\, du =$$

$$= \frac{\cos\alpha z + i\sin\alpha z}{\lambda^z}\,\Gamma(z).$$

În integrala a doua, făcînd substituţia $t = \dfrac{v(\cos\alpha - i\sin\alpha)}{\lambda}$, obţinem

$$\int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-\lambda t(\cos\alpha + i\sin\alpha)}\, dt = \frac{\cos\alpha z - i\sin\alpha z}{\lambda^z}\,\Gamma(z).$$

Înlocuind în (1) obţinem relaţia din enunţ.

VI.3. Să se calculeze

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin^n x}{(1 + a\cos x)^{n+1}}\, dx, \quad n > 0, \quad 0 < a < 1.$$

R. Făcînd substituţia

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\frac{t}{2},$$

obţinem

$$I = 2^n\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int_0^\pi \frac{\operatorname{tg}^n\frac{t}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)}{(1+a)^{n+1}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)^{n+1}}\, dt =$$

$$= 2^n \frac{1}{(1-a^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\pi \operatorname{tg}^n\frac{t}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)^{-n} dt.$$

În ultima integrală se face substituţia $\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} = u$ şi se obţine

$$I = \frac{2^n}{(1-a^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}} (1+u)^{-(n+1)}\, du = \frac{2^n}{(1-a^2)^{\frac{n+1}{2}}} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2^n}{(1-a^2)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(n+1)}.$$

VI.4. Să se arate că

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \ln 2.$$

R. Se porneşte de la relaţia

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Avem

$$\frac{\Gamma(p+q) - \Gamma(p)}{q} = \frac{\Gamma(q) - B(p, q)}{B(p, q)} \cdot \frac{1}{q} \Gamma(p) = [\Gamma(q) - B(p, q)] \frac{\Gamma(p)}{B(p, q)} \cdot \frac{1}{q} =$$

$$= [\Gamma(q) - B(p, q)] \frac{\Gamma(p+q)}{q\Gamma(q)} = [\Gamma(q) - B(p, q)] \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q+1)}.$$

deci

$$\Gamma'(p) = \lim_{q \to 0} \frac{\Gamma(p+q) - \Gamma(p)}{q} = \lim_{q \to 0} [\Gamma(q) - B(p, q)] = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1)}. \qquad (1)$$

Se ştie că funcţia Γ este derivabilă deci limita din stînga egalităţii există şi, prin urmare, există şi limita din dreapta.

Dacă în relaţia de definiţie a funcţiei $B(p, q)$,

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt,$$

se face substituţia $t = e^{-u}$, rezultă expresia

$$B(p, q) = \int_0^\infty e^{-pu}(1 - e^{-u})^{q-1}\, du.$$

Din (1) rezultă, ţinînd seama de faptul că $\Gamma(1) = 1$,

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = \lim_{q\to 0} \int_0^\infty [e^{-u}u^{q-1} - e^{-pu}(1 - e^{-u})^{q-1}]\, du =$$

$$= \int_0^\infty \lim_{q\to 0} [e^{-u}u^{q-1} - e^{-pu}(1 - e^{-u})^{q-1}]\, du = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-pu}}{1 - e^{-u}}\right) du.$$

Ţinînd seama de relaţia (2), avem

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \int_0^\infty \left[\left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}}\right) - \left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{1 - e^{-u}}\right)\right] du =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}}\, du + \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{1 - e^{-u}}\, du.$$

Făcînd substituţia $e^{-\frac{u}{2}} = v$, obţinem

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\int_0^1 \frac{dv}{1 + v} = 2 \ln 2.$$

VI.5. Să se stabilească formula lui Gauss

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z + \frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2} - nz}\, \Gamma(nz),$$

(n natural) şi să se arate că

$$B(p, p) \cdot B\left(p + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{4p-1}} \cdot \frac{1}{p}.$$

R. Avem

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \left[e^{-t} - \frac{1}{(1 + t)^z}\right] \frac{dt}{t}. \qquad (1)$$

Notînd $\Gamma'(1) = -\gamma$ (γ este constanta lui Euler) avem

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = -\gamma = \int_0^\infty \left(e^{-t} - \frac{1}{1+t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Scăzînd din (1) formula (2), obținem

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \gamma = \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^z}\right]\frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{1}{1+t}\left[1 - \frac{1}{(1+t)^{z-1}}\right]\frac{dt}{t}.$$

În ultima integrală facem substituția $x = \frac{1}{1+t}$:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^1 \frac{1 - x^{z-1}}{1-x}\,dx - \gamma.$$

Punînd acum $x = u^n$, obținem

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \gamma = n\int_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{nu-1}}{1-u^n}\,du,$$

de unde înlocuind pe z cu $z + \frac{k}{n}$, ($k = 0, 1, \ldots, n-1$), rezultă

$$\frac{\Gamma'\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)} + \gamma = n\int_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{nz+k-1}}{1-u^n}\,du.$$

Însumînd ultima relație pentru $k = 0, 1, \ldots, n = 1$, avem

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)} + n\gamma = n\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{nz+k-1}}{1-u^n}\,du = n\int_0^1 \left[\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{u^{nz-1}}{1-u}\right]du.$$

Deoarece

$$\frac{\Gamma'(nz)}{\Gamma(nz)} + \gamma = \int_0^1 \frac{1 - u^{nz-1}}{1-u}\,du,$$

vom avea

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{h}{n}\right)} - n\frac{\Gamma'(nz)}{\Gamma(nz)} = n\int_0^1 \left(\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{1}{1-u}\right) du = -n\ln\frac{1-u^n}{1-u}\Bigg|_0^1 = n\ln n.$$

Dar

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(z+\frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)} - n\frac{\Gamma'(nz)}{\Gamma(nz)} = \frac{d}{dz}\ln\left[\frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nz)}\right].$$

Avem prin integrare

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = Cn^{-nz}, \tag{3}$$

unde C este o constantă de integrare. Pentru a determina această constantă facem în (3) $z = 1$:

$$\Gamma(1)\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(1+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{C}{n^n}.$$

Ridicînd ultima relaţie la pătrat, avem

$$\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{C^2}{n^{2n}},$$

dar

$$\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi k}{n}},$$

rezultă

$$\frac{C^2}{n^{2n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Pentru a determina valoarea produsului $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}$, considerăm identitatea

$$\frac{z^n-1}{z-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z-\cos\frac{\pi 2k}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Pentru $z = 1$ găsim

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

de unde, luînd modulul

$$n = \prod_{k=0}^{n-1}\left|1 - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right| = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n},$$

deci

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^n - 1}$$

și

$$C = n^{n-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Rezultă din (3)

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{nz-\frac{1}{2}}}\,\Gamma(nz). \tag{4}$$

Avem

$$B(p,\ p)\cdot B\left(p+\frac{1}{2},\ p+\frac{1}{2}\right) = \frac{[\Gamma(p)]^2}{\Gamma(2p)}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(2p+1)} = \frac{\left[\Gamma(p)\cdot\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2p\,[\Gamma(2p)]^2}.$$

Dacă facem în relația (4) $n = 2$ și $z = p$, obținem

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\Gamma(2p)}{2^{2p-\frac{1}{2}}},$$

deci

$$B(p,\ p)\cdot B\left(p+\frac{1}{2},\ p+\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi[\Gamma(2p)]^2}{2p\cdot 2^{4p-1}[\Gamma(2p)]^2} = \frac{\pi}{p\cdot 2^{4p-1}}.$$

VI.6. Să se demonstreze că între funcțiile lui Bessel de prima speță există relațiile

$$J_\nu(x)\,J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu}(x)\,J_{\nu-1}(x) = \frac{2\sin\pi\nu}{\pi x},$$

$$J_\nu(x)\,J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu}(x)\,J_{\nu+1}(x) = -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi x},$$

R. Wronskianul funcţiilor $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$ este

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -\frac{2 \sin \pi\nu}{\pi x}$$

sau

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = \begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ J'_\nu & J'_{-\nu} \end{vmatrix} = J_\nu J'_{-\nu} - J_{-\nu} J'_\nu = -\frac{2 \sin \pi\nu}{\pi x}.$$

Relaţiile de recurenţă între funcţiile lui Bessel ne dau

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= 2J'_\nu(x), \\ J_{-\nu-1}(x) - J_{-\nu+1}(x) &= 2J'_{-\nu}(x) \end{aligned} \tag{1}$$

şi

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \\ J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu-1}(x) &= -\frac{2\nu}{x} J_{-\nu}(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Înlocuind în expresia wronskianului pe $J'_\nu(x)$, $J'_{-\nu}(x)$ prin relaţiile (1) obţinem

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = \frac{1}{2} J_\nu(x) [J_{-\nu-1}(x) - J_{-1+1}(x)] - \frac{1}{2} J_{-\nu}(x) [J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)] =$$

$$= -\frac{1}{2} [J_\nu(x) J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu}(x) J_{-\nu-1}] + \frac{1}{2} [J_\nu(x) J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu}(x) J_{\nu+1}(x)]. \tag{3}$$

În ultima paranteză înlocuim $J_{-\nu-1}(x)$ şi $J_{\nu+1}(x)$ prin relaţiile (2) şi obţinem

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -[J_\nu(x) J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu}(x) J_{\nu-1}(x)] = -\frac{2 \sin \pi\nu}{\pi x},$$

deci

$$J_\nu(x) J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu}(x) J_{\nu-1}(x) = \frac{2 \sin \pi\nu}{\pi x}.$$

Pentru a obţine relaţia a doua din enunţ în expresia (3) a wronskianului, înlocuim în prima paranteză pe $J_{-\nu+1}(x)$ şi $J_{\nu-1}(x)$ cu expresiile din (2) şi obţinem

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = J_\nu(x) J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu}(x) J_{\nu+1}(x) = -\frac{2 \sin \pi\nu}{\pi x}.$$

VI.7. Să se demonstreze relaţiile

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \pi i e^{i\frac{\pi\nu}{2}} H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{2} \pi i e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} H_{-\nu}^{(1)}(x).$$

R. Avem pentru funcţiile lui Hankel expresiile

$$H_\nu^{(1)}(x) = i\,\frac{J_\nu(x)\,e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}, \qquad H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(x), \tag{1}$$

iar pentru funcţiile lui Bessel modificate

$$J_\nu(x) = e^{-i\nu\frac{\pi}{2}}J_\nu(ix), \qquad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\pi\nu}, \tag{2}$$

deci ţinînd seama de relaţiile (1) şi (2) rezultă

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\pi i e^{i\frac{\pi\nu}{2}} H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\pi i e^{i\frac{\pi\nu}{2}}\cdot i\,\frac{J_\nu(ix)\,e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(ix)}{\sin\pi\nu} =$$

$$= \frac{\pi}{2}e^{i\frac{\pi\nu}{2}}\,\frac{J_{-\nu}(ix) - J_\nu(ix)\,e^{-i\pi\nu}}{\sin\pi\nu} = \frac{\pi}{2}e^{i\frac{\pi\nu}{2}}\,\frac{e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}I_{-\nu}(x) - e^{i\frac{\pi\nu}{2}}I_\nu(x)\,e^{-i\pi\nu}}{\sin\pi\nu} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\pi\nu}$$

şi deci, prima egalitate este demonstrată.

Pentru a demonstra ultima egalitate, dacă ţinem seama de relaţia a doua din (1), obţinem

$$\frac{1}{2}\pi i e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\pi i\,e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\pi i\,e^{i\frac{\pi\nu}{2}}H_\nu^{(1)}(x).$$

VI.8. Să se calculeze integralele lui Fresnel

$$I_1(\nu) = \int_0^\nu \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt, \quad I_2(\nu) = \int_0^\nu \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt.$$

R. Cu transformarea $\frac{\pi t^2}{2} = z$ integralele se scriu

$$I_1(\nu) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\nu^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\nu^2}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(z)\,dz,$$

$$I_2(\nu) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\nu^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\nu^2}{2}} J_{\frac{1}{2}}(z)\,dz.$$

Pentru a calcula ultimele integrale vom utiliza una din formulele de recurenţă pentru funcţiile Bessel de prima speţă şi anume

$$2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z).$$

Înlocuind în această relaţia pe ν cu $\nu + 1$ şi integrînd cei doi membri, obţinem

$$2J_{\nu+1}(z) = \int_0^z J_\nu(z)dz - \int_0^z J_{\nu+2}(z)dz.$$

Deducem

$$2J_{\nu+3}(z) = \int_0^z J_{\nu+2}(z)\,dz - \int_0^z J_{\nu+4}(z)dz,$$

$$2J_{\nu+5}(z) = \int_0^z J_{\nu+4}(z)\,dz - \int_0^z J_{\nu+6}(z)\,dz,$$

.....

Adunînd aceste relaţii, obţinem

$$\int_0^z J_\nu(z)\,dz = 2[J_{\nu+1}(z) + J_{\nu+3}(z) + \dots].$$

Seria din membrul doi este convergentă. Pe baza acestui calcul putem scrie

$$I_1(\nu) = J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + J_{\frac{9}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + \cdots,$$

$$I_2(\nu) = J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + J_{\frac{7}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + J_{\frac{11}{2}}\left(\frac{\pi\nu^2}{2}\right) + \cdots$$

Aceste două serii sînt convergente şi foarte comode pentru calculul celor două integrale.

VI.9. Să se dezvolte în serie Fourier în raport cu θ funcţiile $e^{ix}\sin\theta$, $\cos(x\sin\theta)$, $\sin(x\sin\theta)$.

R. Vom dezvolta în serii de puteri ale lui t funcţia

$$e^{\frac{xt}{2} - \frac{x}{2t}} = e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}}.$$

Avem

$$e^{\frac{xt}{2} - \frac{x}{2t}} = \left[1 + \frac{xt}{2} + \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^3}{3!} + \cdots\right] \cdot \left[1 - \frac{x}{2t} + \frac{\left(\frac{x}{2t}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{x}{2t}\right)^3}{3!} + \cdots\right] =$$

$$= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots + c_1 t^{-1} + c_{-2} t^{-2} + c_{-3} t^{-3} + \cdots$$

Fiecare dintre coeficienţii c_n este o serie infinită şi anume

$$c_n = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!(n+2)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+6}}{3!(n+3)!} + \cdots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}.$$

Rezultă că c_n sînt funcţii Bessel de prima speţă

$$c_n = J_n(x)$$

i

$$e^{\frac{xt}{2} - \frac{x}{2t}} = J_0(x) + tJ_1(x) + t^2J_2(x) + t^3J_3(x) + \cdots + t^{-1}J_{-1}(x) + t^{-2}J_{-2}(x) + \cdots =$$
$$= J_0(x) + J_1(x)(t - t^{-1}) + J_2(x)(t^2 + t^{-2}) + J_3(x)(t^3 - t^{-3}) + J_4(x)(t^4 + t^{-4}) + \cdots$$

Fie acum $t = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Atunci

$$t^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta,$$
$$t^{-2} = \cos 2\theta - i\sin 2\theta.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Avem

$$e^{\frac{xt}{2} - \frac{x}{2t}} = e^{\frac{x}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} = e^{ix\sin\theta},$$

deci

$$e^{ix\sin\theta} = J_0(x) + 2[J_2(x)\cos 2\theta + J_4(x)\cos 4\theta + \cdots] +$$
$$+ 2i[J_1(x)\sin\theta + J_3(x)\sin 3\theta + \cdots],$$

sau

$$e^{ix\sin\theta} = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty}[J_{2k}(x)\cos 2k\theta + iJ_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\theta]. \qquad (1)$$

Pentru a dezvolta celelalte funcţii, vom observa că

$$e^{ix\sin\theta} = \cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta),$$

deci

$$\cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty}[J_{2k}(x)\cos 2k\theta + iJ_{2k-1}(x)\sin(2k-1)\theta].$$

Egalînd părţile reale şi cele imaginare, obţinem

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\cos 2k\theta,$$

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k-1}(x)\sin(2k+1)\theta.$$

Dacă în (1) înlocuim pe θ cu $\frac{\pi}{2} - \theta$, obținem

$$e^{ix\cos\theta} = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} i^k \cos k\theta,$$

de unde rezultă

$$\cos(x\cos\theta) = J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x)\cos 2k\theta$$

și

$$\sin(x\cos\theta) = 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(x)\cos(2k+1)\theta.$$

Observație. Obținem același rezultat dacă se scrie dezvoltarea în serie Fourier a funcției $f(\theta) = e^{ix\sin\theta}$ sub forma complexă și dacă mai departe se procedează ca mai înainte.

VI.10. Să se demonstreze relația

$$J_n(x+y) = \sum_{p=0}^{n} J_p(x)\,J_{p-n}(y) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p\,[J_p(x)\,J_{p+n}(y) + J_p(y)\,J_{p+n}(x)].$$

R. Avem (problema 9)

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = J_0(z) + tJ_1(z) + t^2J_2(z) + \cdots + t^nJ_n(z) + \cdots + \frac{1}{t}J_{-1}(z) + \frac{1}{t^2}J_{-2}(z) + \ldots + \frac{1}{t^n}J_{-n}(z) + \ldots$$

Dacă în această formulă punem $z = x + y$, obținem

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,e^{\frac{y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^nJ_n(x+y)$$

sau

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} t^pJ_p(x)\cdot\sum_{q=-\infty}^{+\infty} t^qJ_q(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^nJ_n(x+y).$$

Efectuînd înmulțirea dezvoltărilor în serie și egalînd coeficienții lui t^n, obținem

$$J_n(x+y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(x)\,J_{n-p}(y).$$

Avînd în vedere relaţia

$$J_{-n} = (-1)^n J_n,$$

putem să introducem în această dezvoltare numai indici pozitivi. Pentru $n = 0$, avem

$$J_0(x + y) = J_0(x) J_0(y) - 2J_1(x) J_1(y) + \ldots + 2(-1)^n J_n(x)\ J_n(y) + \ldots,$$

pentru $n = 1$, avem

$$J_1(x + y) = J_0(x) J_1(y) + J_1(x) J_0(y) - [J_2(x) J_1(y) + J_2(y) J_1(x)] + \ldots +$$
$$+ (-1)^n [J_n(x) J_{n+1}(y) + J_n(y) J_{n+1}(x)] + \ldots$$

Formula generală este

$$J_n(x + y) = \sum_{p=0}^{n} J_p(x) J_{n-p}(y) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p [J_p(x) J_{p+n}(y) + J_p(y) J_{p+n}(x)].$$

VI.11. Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$x^2 y'' + (1 - 2\nu) xy' + \nu^2 (x^{2\nu} + 1 - \nu^2) y = 0.$$

R. Facem schimbarea de variabilă

$$x = t^\alpha$$

urmînd ca α să fie determinat convenabil, astfel încît ecuaţia să se reducă la o ecuaţie Bessel. Avem

$$y^2 = \frac{dy}{dx} \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} \frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha} t^{1-\alpha} \frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\alpha^2}\left[t^{2-2\alpha} \frac{d^2y}{dt^2} + (1 - \alpha) t^{1-2\alpha} \frac{dy}{dt}\right].$$

Ecuaţia devine

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + (1 - 2\alpha\nu) t \frac{dy}{dt} + \alpha^2\nu^2 (t^{2\alpha\nu} + 1 - \nu^2) y = 0.$$

Vom lua $\alpha = \frac{1}{\nu}$ pentru a avea în ultima paranteză t^2. Ecuaţia se scrie

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - t \frac{dy}{dt} + (t^2 + 1 - \nu^2) = y - 0 \qquad (1)$$

În această ecuaţie vom face schimbarea de funcţie

$$y = t\ z(t),$$

iar β va fi determinat din condiția ca coeficientul lui $t\frac{dz}{dt}$ să fie 1. Avem

$$\frac{dy}{dt} = \beta t^{\beta-1} z + t^{\beta}\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = t^{\beta}\frac{d^2z}{dt^2} + 2\beta t^{\beta-1}\frac{dz}{dt} + \beta(\beta-1)t^{\beta-2}z.$$

Înlocuind în ecuația (1) și simplificînd cu t^{β}, obținem ecuația

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + (2\beta-1)t\frac{dz}{dt} + z(\beta^2 - 2\beta + 1 + t^2 - \nu^2) = 0.$$

Din condiția $2\beta - 1 = 1$ rezultă $\beta = 1$, iar ecuația este

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + (t^2 - \nu^2)z = 0.$$

Această ultimă ecuație este forma canonică a ecuației de tip Bessel, deci soluția ei este

$$z(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t), \quad (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Soluția generală a ecuației date este

$$y(x) = x^\nu[C_1 J_\nu(x^\nu) + C_2 Y_\nu(x^\nu)].$$

VI.12. Să se rezolve ecuația

$$y'' - xy' = 0.$$

R. Vom face schimbarea de variabilă $x = t^\alpha$ și schimbarea de funcție $y = t^\beta z(t)$. Avem

$$y' = \frac{\beta}{\alpha}t^{\beta-\alpha}z + \frac{1}{\alpha}t^{\beta-\alpha+1}\frac{dz}{dt},$$

$$y'' = \frac{1}{\alpha^2}t^{\beta-2\alpha+2}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2\beta-\alpha+1}{\alpha^2}t^{\beta-2\alpha+1}\frac{dz}{dt} + \frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha^2}t^{\beta-2\alpha}z.$$

Ecuația devine după împărțirea cu $t^{\beta-2\alpha}$

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + (2\beta-\alpha+1)t\frac{dz}{dt} + [-t^{2\alpha}\alpha^2 + \beta(\beta-\alpha)]z = 0.$$

Luînd $\alpha = \frac{2}{3}$, din condiția $2\beta - \alpha + 1 = 1$ rezultă $\beta = \frac{1}{3}$, iar ecuația se scrie

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + \left[\left(\frac{2}{3}t\right)^2 - \frac{1}{9}\right]z = 0.$$

Această ultimă ecuație prin schimbarea de variabilă $u = \mathrm{i}\,\frac{2}{3}\,t$ se reduce la forma canonică a ecuației Bessel, deci soluția ei este

$$z(t) = C_1 J_{\frac{1}{3}}\left(\mathrm{i}\,\frac{2}{3}\,t\right) + C_2 Y_{\frac{1}{3}}\left(\mathrm{i}\,\frac{2}{3}\,t\right),$$

iar soluția ecuației date va fi

$$y(x) = \sqrt{x}\left[C_1 J_{\frac{1}{3}}\left(\mathrm{i}\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right) + C_2 Y_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\,\mathrm{i}\,x^{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

VI.13. Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$xy'' - 2py' - cxy = 0.$$

R. Facem schimbarea de funcție

$$y(x) = x^{\alpha} z(x).$$

Avem

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1} z(x) + x^{\alpha}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2} z(x) + 2\alpha x^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + x^{\alpha}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}.$$

Ecuația devine

$$x^2 z'' + (2\alpha - 2p)\,xz' + (\alpha^2 - \alpha - 2p\alpha - cx^2)\,z = 0.$$

Vom lua $2\alpha - 2p = 1$ pentru ca xz' să figureze în ecuația cu coeficientul 1, deci $\alpha = p + \frac{1}{2}$ și ecuația se scrie

$$x^2 z'' + xz' + \left[(\mathrm{i}\sqrt{cx})^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2\right] z = 0.$$

Dacă în ultima ecuație se face schimbarea de variabilă $\mathrm{i}\sqrt{cx} = t$, se obține ecuația

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + t\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \left[t^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2\right] z = 0.$$

Ecuația a fost adusă la forma canonică a ecuației Bessel cu $\nu^2 = \left(p + \frac{1}{2}\right)^2$ iar soluția ei este

$$y = x^{p+\frac{1}{2}}\left[C_1 J_{p+\frac{1}{2}}(\mathrm{i}\sqrt{cx}) + C_2 Y_{p+\frac{1}{2}}(\mathrm{i}\sqrt{cx})\right].$$

VI.14. Să se rezolve ecuaţia

$$x^2y'' + (x + 2)\, x^2 \operatorname{cotg} x)\, y' + (x \operatorname{cotg} x - \nu^2)\, y = 0.$$

R. Facem schimbarea de funcţie $y = \dfrac{1}{\sin x} z(x)$,

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin x} z + \frac{1}{\sin x} z'(x),$$

$$y'' = \frac{1}{\sin x} z'' - 2\frac{\cos x}{\sin x} z' + \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x} z.$$

Ecuaţia devine prin înmulţire cu $\sin x$

$$x^2z'' + xz' + (x^2 - v^2)\, z = 0$$

şi are soluţia

$$z(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \qquad (C_1,\ C_2 = \text{const}).$$

Rezultă

$$y(x) = \frac{1}{\sin x} [C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)].$$

VI.15. Să se determine soluţia ecuaţiei Bessel

$$x^2y'' + [x - 2\, x^2 f(x)]y' + [x^2(1 + f^2 - f') - xf - \nu^2]y = 0.$$

R. Facem schimbarea de funcţie

$$y(x) = e^{\int f(x)dx} \cdot z(x).$$

Avem

$$y' = fe^{\int f dx} z + e^{\int f dx} z',$$

$$y'' = f' e^{\int f dx} z + f^2 e^{\int f dx} z + 2fe^{\int f dx} z' + e^{\int f dx} z'',$$

iar ecuaţia devine

$$x^2z'' + xz' + z(x^2 - \nu^2) = 0$$

cu osluţia

$$z = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).$$

Soluţia ecuaţiei date este

$$y(x) = e^{\int f dx} [C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)].$$

VI.16. Să se calculeze imaginea funcţiei $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^z \, dx$, $\mathrm{Re}(z) > -1$ şi să se deducă de aici imaginea funcţiei $\ln t$.

R. În relaţia care ne dă funcţia $\Gamma(z+1)$ să facem schimbarea $x = pt$:

$$\Gamma(z+1) = p \int_0^\infty e^{-pt} p^z t^z \, dt$$

sau

$$\frac{1}{p^{z+1}} = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{t^z}{\Gamma(z+1)} \, dt,$$

deci

$$\mathcal{L} \frac{t^z}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{p^{z+1}}.$$

Derivînd această relaţie în raport cu z, obţinem

$$\frac{1}{p^{z-1}} \frac{d\Gamma(z+1)}{dz} + \frac{1}{p^{z+1}} \ln \frac{1}{p} \cdot \Gamma(z+1) = \mathcal{L}(t^z \ln t),$$

adică

$$\frac{\Gamma(z+1)}{p^{z+1}} \left[\frac{\frac{d\Gamma(z+1)}{dz}}{\Gamma(z+1)} + \ln \frac{1}{p} \right] = \mathcal{L}(t^z \ln t). \tag{1}$$

Se ştie că

$$\Gamma(z+1) = \lim_{k \to \infty} \frac{k!\, k^{z+1}}{(z+1)(z+2) \ldots (z+k+1)},$$

deci

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} \cdot \frac{d\Gamma(z+1)}{dz} = \lim_{k \to \infty} \left[\ln k - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \ldots - \frac{1}{z+k+1} \right].$$

iar pentru $z = 0$ avem

$$\left[\frac{\frac{d\Gamma(z+1)}{dz}}{\Gamma(z+1)} \right]_{z=0} = \lim_{k \to \infty} \left[\ln k - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{k+1} \right] = -\gamma. \tag{2}$$

Introducînd (2) în (1) în care facem $z = 0$, obţinem

$$\mathcal{L} \ln t = -\frac{\ln p + \gamma}{p}.$$

VI.17. Să se calculeze imaginiile funcţiilor Bessel de ordin întreg.

R. Vom porni de la definiţia clasică a funcţiei Bessel de prima speţă

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - t\sin\theta)\,d\theta$$

sau

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\theta - t\sin\theta)}d\theta.$$

Avem

$$F(p) = \mathcal{L}J_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\theta - t\sin\theta)}\,d\theta\right]e^{-pt}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{e^{i(n\theta - t\sin\theta) - pt}}{p + i\sin\theta}\right]_0^{\infty} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{in\theta}}{p + i\sin\theta}\,d\theta.$$

Cu transformarea $e^{i\theta} = z$ avem

$$F(p) = \frac{1}{\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^n\,dz}{z^2 + 2pz - 1}.$$

Funcţia de integrat are în interiorul cercului $|z| = 1$ polul simplu

$$z_1 = -p + \sqrt{p^2+1},$$

iar reziduul relativ la acest pol este

$$R_{z_1} = \left[\frac{z^n}{z + p + \sqrt{p^2+1}}\right]_{z=-p+\sqrt{p^2+1}} = \frac{(-p + \sqrt{p^2+1})^n}{2\sqrt{p^2+1}},$$

Rezultă

$$F(p) = 2R_{z_1},$$

de unde

$$\mathcal{L}J_n(t) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}(-p + \sqrt{p^2+1})^n.$$

VI.18. Să se demonstreze relaţia

$$\mathcal{L}\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t\tau})\cdot h(\tau)\cdot d\tau = \frac{1}{p^{n+1}}F\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

unde $F(p) = \mathcal{L}h(t)$.

R. În formula de transformare Laplace să schimbăm pe p în $\frac{1}{p}$ și să împărțim apoi cu p^{n+1}. Avem

$$\frac{1}{p^{n+1}} F\left(\frac{1}{p}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{p}}}{p^{n+1}} h(\tau)\, d\tau.$$

Să arătăm acum următoarea corespondență:

$$\frac{\alpha^n}{p^{n+1}} e^{-\frac{\alpha}{p}} = \mathcal{L}(\alpha t)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{\alpha t}), \tag{1}$$

unde α este un parametru.

Dacă se dezvoltă în serie cei doi membri ai ultimei relații, trebuie să se verifice relațiile

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\alpha^{k+n}}{p^{k+n+1}} \cdot \frac{1}{k!} \qquad \mathcal{L} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \alpha^{k+n} t^{k+n}.$$

Aceste relații sînt verificate deoarece

$$\mathcal{L} \frac{t^{k+n}}{(k+n)!} = \frac{1}{p^{k+n+1}}.$$

După (1) se poate scrie relația de demonstrat.

Dacă facem $n = 0$, obținem

$$\frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) = \mathcal{L} \int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau}) h(\tau) d\tau.$$

VI.19. Să se demonstreze relația

$$L_{n+1}(t) - (2n + 1 - t) L_n(t) + n^2 L_{n-1}(t) = 0,$$

unde $L(t)$ sînt polinoamele lui Laguerre.

R. Aceste polinoame sînt definite prin formula

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}).$$

Dacă aplicăm relației $\mathcal{L} t^n = \frac{n!}{p^{n+1}}$ teorema deplasării $F(p + \lambda) = \mathcal{L}[e^{-\lambda t} f(t)]$ cu $\lambda = 1$, obținem

$$f(t) = t^n e^{-t} = \mathcal{L}^{-1} \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

Cum $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, din teorema $p^n F(p) = \mathcal{L} f^{(n)}(t)$ deducem

$$\mathcal{L} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) = \frac{n!p^n}{(p+1)^{n+1}}.$$

Aplicînd iarăşi teorema deplasării cu $\lambda = -1$, avem

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) = \mathcal{L}^{-1} n! \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n.$$

Avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) \frac{x^n}{n!} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{p + \frac{1-x}{x}},$$

x fiind o variabilă oarecare.

Se ştie că

$$\mathcal{L} e^{-\alpha t} = \frac{1}{p+\alpha},$$

deci luînd $\alpha = \frac{x}{1-x}$, rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x} e^{-t\frac{x}{1-x}}.$$

Rezultă că polinoamele Laguerre sînt coeficienţii lui $\frac{x^n}{n!}$ din dezvoltarea în serie a funcţiei $\frac{1}{1-x} e^{-t\frac{x}{1-x}}$, numită funcţia generatoare a polinoamelor lui Laguerre.

Scriem

$$L_{n+1}(t) + n^2 L_{n-1}(t) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[(2n+1)\, n! \frac{1}{p}\left(p - \frac{1}{p}\right)^n - \frac{p-n-1}{p(p-1)} \cdot n! \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right].$$

Aplicînd teorema derivării imaginii rezultă

$$\mathcal{L}[tL_n(t)] = -n! \frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right] = n! \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n \cdot \frac{p-n-1}{p(p-2)},$$

de unde rezultă relaţia cerută.

VI.20. Să se studieze oscilaţiile unui fir greu de lungime l şi fără rigiditate (fig. VI.20) suspendat la un capăt A, limitîndu-ne la funcţiile sinusoidale de timp.

R. Fie μ masa firului pe unitatea de lungime şi P şi P' două puncte infinit vecine. Forţa care solicită segmentul MM' este proiecţia pe axa Oy a creşterii tensiunii T a firului, cînd se trece de la P la P'. Pe unitatea de lungime avem forţa

$$f = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

La înălţimea x, $T = x\mu g$, deci

$$f = g\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}\right) = g\mu\left[\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right].$$

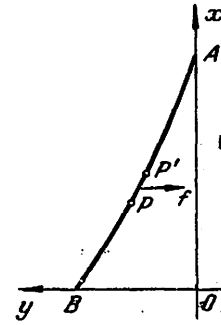


Fig. VI.20

Forţa de inerţie este pe unitatea de lungime $\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, deci ecuaţia de mişcare va fi

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

iar dacă ne limităm la funcţiile sinusoidale de timp, $y = \varphi(x)\,e^{i\omega t}$, avem

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\omega^2}{g}\frac{\varphi}{x} = 0.$$

sau

$$x^2\varphi'' + x\varphi' + x\frac{\omega^2}{g}\varphi = 0. \qquad (1)$$

Cu schimbarea de variabilă $x = z^2$ ecuaţia (1) devine

$$z^2\frac{d^2\varphi}{dz^2} + z\frac{d\varphi}{dz} + \left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\right)^2 z^2\varphi = 0,$$

cu soluţia

$$\varphi(z) = AJ_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}z\right) + BY_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}z\right),$$

iar soluţia ecuaţiei (1) este

$$\varphi(x) = AJ_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right) + BY_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right).$$

Ţinînd seama de faptul că pentru $x = 0$ soluţia trebuie să aibă valori finite, avem

$$y = Ae^{i\omega t}J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right).$$

Pentru $x = l$, avem $y = 0$, deci una din rădăcinile funcţiei $J_0(\alpha) = 0$ este $2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Fie α_p una din rădăcini. Avem

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\alpha_p,$$

fapt care pune în evidenţă o infinitate de moduri de oscilaţii posibile.

VI.21. Să se studieze efectul pelicular al curenţilor care străbat un conductor cilindric de rotaţie infinit.

R. Fie un fir cilindric infinit, de secţiune circulară, străbătut de un curent electric (fig. VI.21).

Dacă vom considera un cilindru de grosime dx şi de rază x, intensitatea curentului care străbate acest cilindru este

$$dI_x = 2\pi\sigma x dx,$$

unde σ este densitatea de curent într-un punct situat la distanţa x de axa firului.

Cîmpul magnetic creat de curent într-un punct situat la distanţa r de axă ($r > x$) este

$$dH = \frac{dI_x}{2\pi r} = \frac{\sigma x dx}{r}$$

iar cîmpul magnetic creat de toţi curenţii pentru care $x < r$ va fi

$$H = \frac{1}{r}\int_0^r \sigma x dx. \qquad (1)$$

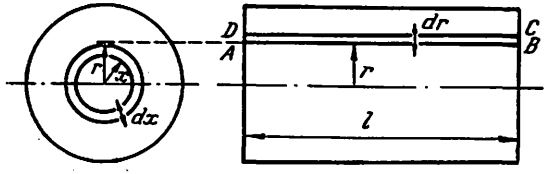


Fig. VI.21

Dacă se parcurge circuitul $ABCD$, tensiunea electromotoare dE este egală cu tensiunea electromotoare indusă de cîmpul H, deci

$$dE = \rho l d\sigma = \mu \frac{dH}{dt} l dr,$$

ρ fiind rezistivitatea materialului din care este construit firul.

Derivînd (1) în raport cu r şi apoi în raport cu t, obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

sau

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial r}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0.$$

În ipoteza că circuitul este sinusoidal de pulsație ω, ecuația precedentă devine

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dr}-\frac{i\omega\mu\sigma}{\rho}=0.$$

Aceasta este o ecuație tip Bessel; o mai putem scrie

$$r^2\frac{d^2\sigma}{dr^2}+r\frac{d\sigma}{dr}-ik^2\sigma=0,\qquad k^2=\frac{\omega\mu}{\rho}.$$

Soluția generală a ecuației este.

$$\sigma=C_1J_0\left(kri^{\frac{3}{2}}\right)+C_2K_0\left(kri^{\frac{3}{2}}\right).$$

Pentru $\rho=0$, densitatea σ are o valoare finită, deci $C_2=0$. Rezultă

$$\sigma=C_1J_0\left(kri^{\frac{3}{2}}\right)=C_1M_0(kr)\,e^{i\theta_0(kr)},$$

unde $M_0(z)\,e^{i\theta_0(z)}=\mathrm{ber}\,(z)+i\,\mathrm{bei}(z)$.

Dacă raza firului este a și σ_0 densitatea de suprafață, putem scrie

$$\sigma=\sigma_0\frac{M_0(kr)}{M_0(ka)}\,e^{i[\theta_0(kr)-\theta_0(ka)]}.$$

Luînd ca origine a fazelor unghiul fazelor la suprafața firului

$$\sigma=\sigma_0\frac{M_0(kr)}{M_0(ka)}\,e^{i\theta_0(kr)},$$

raportul

$$\sigma_0\frac{M_0(kr)}{M_0(ka)}$$

este valoarea amplitudinii curentului la distanța r de axă. În cazul în care kr este mare, unghiul de fază poate depăși cu mult 2π. Deci, în interiorul firului pot exista domenii în care curenții sînt în opoziție.

VI.22. Să se dezvolte în serie de polinoame Legendre funcțiile:

$$1^\circ\ f_1(x)=\begin{cases}0, & \text{pentru } -1\leqslant x<\alpha,\\ 1, & \text{pentru } \alpha<x\leqslant 1;\end{cases}\qquad 2^\circ\ f_2(x)=\sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

R. 1° În baza teoremei 1 funcţia astfel definită se dezvoltă în seria

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \tag{1}$$

cu coeficienţii c_n daţi de relaţiile

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{\alpha}^{1} P_n(x)\, dx.$$

Cu ajutorul formulei de recurenţă

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1) P_n(x)$$

şi observînd că $P_n(1) = 1$, găsim

$$c_n = -\frac{1}{2}[P_{n+1}(\alpha) - P_{n-1}(\alpha)], \quad c_0 = \frac{1}{2}(1 - \alpha), \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

de unde rezultă dezvoltarea

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(1 - \alpha) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(\alpha) - P_{n-1}(\alpha)]\, P(x), \quad -1 < x < 1. \tag{2}$$

Notînd cu $S_m(x)$ suma primilor $m + 1$ termeni ai seriei (2), să arătăm că în punctul de discontinuitate $x = \alpha$ este satisfăcută relaţia

$$\lim_{m \to \infty} S_m(\alpha) = \frac{1}{2}\, [f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)].$$

Avem

$$S_m(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \alpha) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} [P_{n+1}(\alpha)\, P_n(\alpha) - P_n(\alpha) P_{n-1}(\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} P_{m+1}(\alpha) P_m(\alpha).$$

Deoarece $P_n(\alpha) \to 0$ cînd $n \to \infty$, avem

$$\lim_{m \to \infty} S_m(\alpha) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\, [f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)].$$

2° Funcţia $f_2(x)$ satisface condiţiile teoremei 1, deci ea se dezvoltă în seria (1). Pentru calcula coeficienţii c_n vom proceda astfel : înmulţim seria

$$(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

cu $f(x)$ şi integrăm termen cu termen în intervalul $(-1, 1)$, deoarece seria este uniform convergentă în intervalul $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Obţinem

$$\frac{1}{2t}\left[1 + t + \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}}\, P_n(x)\, dx, \quad |t| < 1.$$

Dezvoltînd primul membru al acestei egalităţi în serie după puterile lui t, obţinem

$$\frac{4}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}}\, P_n(x)\, dx,$$

de unde

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}}\, P_0(x)\, dx = \frac{4}{3},$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}}\, P_n(x)\, dx = -\frac{4}{(4n^2-1)(2n+3)}.$$

Din relaţiile

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

rezultă dezvoltarea

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}, \quad -1 < x < 1.$$

VI.23. Să se dezvolte în serie de polinoame Hermite funcţiile

1° $$f(x) = e^x, \quad -\infty < x < +\infty;$$

2° $$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

R. 1° Condiţiile teoremei 2 sînt satisfăcute. Avem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n H_n(x),$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+z} H_n(x)\, dx.$$

Din relațiile

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) - 2nH(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2. \ldots,$$

rezultă

$$H_n(x)e^{-x^2} = -\frac{d}{dx}[e^{-x^2} H_{n-1}(x)], \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Integrînd prin părți, obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+z} H_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+z} H_{n-1}(x) dx = \ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2+x}\, dx = \sqrt{\pi} \cdot e^{\frac{1}{4}},$$

de unde rezultă

$$f(x) = e^x = e^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n\, n!}, \; -\infty < x < +\infty.$$

2° Funcția $g(x)$ este pară, deci dezvoltarea ei în serie va avea forma

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} H_{2n}(x),$$

unde

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-x^2} H_{2n}(x) dx = \frac{2e^{-a^2}}{2^{2n}(2n)!\sqrt{\pi}} H_{2n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\, dx = \Phi(a),$$

$\Phi(z)$ fiind funcția de repartiție

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \; |z| < \infty.$$

Rezultă

$$g(x) = \Phi(a) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{2n-1}(x)}{2^{2n} \cdot (2n)!} H_{2n}(x), \qquad -\infty < x < +\infty.$$

VI.24. Să se demonstreze relațiile

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(\sqrt{x}),$$

$$L_n^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} n!} \frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

R. Polinoamele lui Laguerre $L_n^{\alpha}(x)$ se pot reprezenta în mod simplu cu ajutorul integralelor definite, care conțin variabila x ca parametru. Pentru a obține această reprezentare, vom presupune că x este un număr real pozitiv și vom utiliza relația

$$x^{n+\alpha} e^{-x} = \int_0^{\infty} (\sqrt{xt})^{n+\alpha} J_{n+\alpha}(2\sqrt{tx}) e^{-t} dt, \tag{1}$$

unde $J_\nu(x)$ este funcția Bessel de ordinul ν.

Derivînd relația (1) în raport cu x și ținînd seama de relația

$$\frac{d}{du}\left[u^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{u})\right] = u^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(2\sqrt{u}),$$

obținem

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^{m+\alpha} e^{-x}) = \int_0^{\infty} (\sqrt{tx})^{n-m+\alpha} J_{m-n+\alpha}(2\sqrt{tx}) \cdot t^m e^{-t} dt, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

În ultima relație punînd $m = n$ și ținînd seama de definiția polinoamelor lui Laguerre, obținem

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{e^x x^{-\frac{\alpha}{2}}}{n!} \int_0^{\infty} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{tx}) e^{-t} dt, \ \alpha > -1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Relația (2) a fost demonstrată în ipoteza că x este un număr real pozitiv. Aplicînd principiul prelungirii analitice, ea poate fi extinsă la orice valoare complexă a lui x.

Făcînd în (2) $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ și ținînd seama de relațiile cunoscute pentru $J_{\frac{1}{2}}(x)$ și $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, obținem

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{e^x}{n!\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{tx}) dt = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2n} \cos(2\sqrt{xu}) du, \tag{3}$$

$$L_n^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{e^x}{n!\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-t} t^n \sin(2\sqrt{xt})\, dt = \frac{e^x}{n!\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2n+1} \sin(2\sqrt{xu})\, du \tag{4}$$

Vom folosi acum integrala cunoscută

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\infty^0 e^{-t^2} \cos(2xt) dt,$$

unde x este un număr real sau complex. Derivînd de $2n$ ori această relație și ținînd seama de definiția polinoamelor lui Hermite, găsim

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n} \cos(2tx) dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Derivarea sub semnul integrală este permisă deoarece integrala este uniform convergentă în cercul $|x| \leqslant a$ de rază arbitrară a.

În mod analog se obține reprezentarea integrală pentru polinoamele lui Hermite cu indice impar

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n+1} \sin(2xt)\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Ținînd seama în (3) și (4) de relațiile (5) și (6), obținem

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot n!} H_{2n}(\sqrt{x}),$$

$$L_n^{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} \cdot n!} \frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

VI.25. Fie o rețea cu șase dipoli alimentați de curenți în fază, la distanța $\frac{\lambda}{2}\left(n = 4,\ \delta = 0,\ d = \frac{\lambda}{2}\right)$. Să se determine rapoartele $\frac{I_1}{I_0}, \frac{I_2}{I_0}$ în așa fel, încît raportul lobului principal față de lobii secundari să fie egal cu 10.

R. Avem de rezolvat ecuația

$$T_5\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 10.$$

Să considerăm în general ecuația

$$T_n(x) = c, \quad (c = \text{const.})$$

Dacă $|c| < 1$, ecuația are n rădăcini reale. Punînd $\cos \alpha = x$, $\cos \gamma = c$, avem $\alpha = \frac{\gamma + 2k\pi}{n}$; notînd prin $x_0 = \cos\left(\frac{\gamma}{n}\right)$, avem

$$x = x_0 \cos \frac{2k\pi}{n} - \sqrt{1 - x_0^2} \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

Dacă $|c| > 1$, nu există decît o rădăcină reală pozitivă

$$x = \frac{1}{2}\left[\left(c + \sqrt{c^2 - 1}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(c - \sqrt{c^2 - 1}\right)^{\frac{1}{n}}\right].$$

În cazul problemei avem $c = 10$, $n = 5$, deci

$$\frac{1}{\alpha} = 1{,}195$$

și

$$P_5\left(\cos \frac{\Phi}{\alpha}\right) = 2a_0 \cos 5 \frac{\Phi}{2} + 2a_1 \cos 3 \frac{\Phi}{2} + 2a_2 \cos \frac{\Phi}{2} =$$

$$= 2a_0\, T_5\left(\cos \frac{\Phi}{2}\right) + 2\, a_1 T_3\left(\cos \frac{\Phi}{2}\right) + 2a_2 T_1\left(\cos \frac{\Phi}{2}\right) = 32\, a_0 \cos^5 \frac{\Phi}{2} -$$

$$- (40a_0 - 8a_1) \cos^3 \frac{\Phi}{2} + (10a_0 - 6a_1 + 2a_2) \cos \frac{\Phi}{2}.$$

Identificînd cu

$$\frac{T_5\left(\frac{1}{\alpha} \cos \frac{\Phi}{2}\right)}{T_5\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = 2{,}907 \cos^5 \frac{\Phi}{2} - 2{,}95 \cos^3 \frac{\Phi}{2} + 0{,}597 \cos \frac{\Phi}{2},$$

obținem

$$a_0 = 0{,}0908;\ a_1 = 0{,}0857;;\ a_2 = 0{,}101.$$

Deci

$$\frac{I_1}{I_0} = 0{,}944, \quad \frac{I_2}{I_0} = 1{,}113.$$

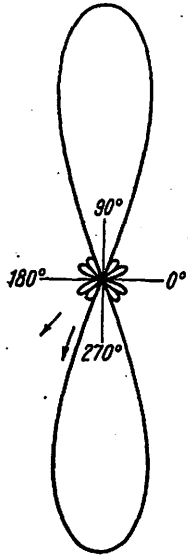


Fig. VI.25

Forma diagramei de radiaţie este dată în fig. VI.25, fiind trasată avînd ca variabilă unghiul β determinat de relaţiile

$$\cos\frac{\Phi}{2} = \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\cos\beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\beta\right).$$

Capitolul **VII**

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL AL DOILEA

Fie $F : \Omega \subset R^8 \to R$. Numim ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea cu două variabile independente definită de F, problema găsirii tuturor funcţiilor $z(x, y)$ care verifică relaţia

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

unde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Se numeşte *soluţie* sau *integrală* a ecuaţiei (1) o funcţie $z = z(x, y)$ de clasa C^2 într-un domeniu din planul (x, y) care înlocuită, împreună cu derivatele sale pînă la ordinul al doilea inclusiv, în (1) să o reducă la o identitate.

Se numeşte *soluţie* (sau *integrală*) *generală* a ecuaţiei (1) o soluţie a sa care depinde de două funcţii arbitrare de o singură variabilă de o clasă determinată.

Folosind notaţiile lui Monge

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

ecuaţia (1) se poate scrie sub forma

$$F(x, y, z, q, r, s, t) = 0. \tag{1}$$

Să presupunem că ecuaţia (1′) poate fi rezolvată în raport cu una din derivatele de ordinul al doilea, de exemplu în raport cu r:

$$r = f(x, y, u, p, q, s, t) \tag{2}$$

cu $f(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$.

Definiţie. *A rezolva problema Cauchy pentru ecuaţia* (2) *înseamnă a găsi o soluţie a ei care să verifice următoarele condiţii :*

$$z(0, y) = \varphi(y),$$

$$\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi(y). \tag{3}$$

unde $\varphi(y)$ *şi* $\psi(y)$ *sînt două funcţii date (definite şi de o clasă convenabilă într-un domeniu care cuprinde originea).*

Teorema 1. (de unicitate a problemei Cauchy). *Ecuaţia* (2) *admite o singură soluţie analitică care să verifice condiţiile* (3) *dacă* f, φ *şi* ψ *sînt funcţii analitice de variabilele lor.*

Teorema 2. (Cauchy-Kovalevskaia, de existenţă). *Fiind dată ecuaţia cu derivate parţiale* (2), *unde funcţia* f *este analitică în vecinătatea punctului* $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, s_0, t_0)$ *şi două funcţii de* y, $\varphi(y)$ *şi* $\psi(y)$, *analitice în vecinătatea lui* y_0, *care sînt astfel încît*

$$\varphi(y_0) = z_0, \quad \varphi'(y_0) = q_0, \quad \varphi''(y_0) = t_0,$$

$$\psi(y_0) = p_0, \quad \psi'(y_0) = s_0,$$

ecuaţia (2) *admite o integrală* $z = z(x, y)$ *analitică în vecinătatea punctului* (x_0, y_0) *şi astfel încît pentru* $x = x_0$

$$z(x_0, y) = \varphi(y), \quad \left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \psi(y). \tag{4}$$

Fiind dată ecuaţia (1'), soluţia problemei Cauchy (4) poate fi interpretată în spaţiul (x, y, z) ca o suprafaţă $z = z(x, y)$, care pentru $x = x_0$ devine $z(x_0, y) = \varphi(y)$. Ecuaţiile

$$x = x_0, \; z(x_0, y) = \varphi(y)$$

reprezintă o curbă (Γ) aflată în planul $x = x_0$, integrala trecînd prin această curbă. Deoarece planul tangent la suprafaţa $z = z(x, y)$ are de-a lungul acestei curbe parametrii directori p, q, -1, vom avea

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=x_0} = q(x_0, y) = \varphi'(y),$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x+x_0} = p(x_0, y) = \psi(y);$$

prin urmare, parametrul p depinde de funcţia $\psi(y)$; există deci o infinitate de suprafeţe integrale ale ecuaţiei date, care trec prin curba (Γ) depinzînd de o funcţie arbitrară $\psi(y)$.

Planul de parametrii directori $p(x_0, y) = \psi(y)$ şi $q(x_0, y) = \varphi'(y)$ variind continuu de-a lungul lui (Γ) în funcţie de parametrul y, defineşte o *suprafaţă desfăşurată* care trece prin (Γ). Teorema de existenţă 2 poate fi interpretată astfel:

Teorema 2'. *Există o suprafaţă integrală olomorfă unică a ecuaţiei* (1) *care este tangentă la suprafaţa desfăşurabilă analitică, definită de*

$$p(x_0, y) = \psi(y), \quad q(x_0, y) = \varphi'(y) \tag{5}$$

de-a lungul curbei (Γ) *de ecuaţii*

$$x = x_0, \quad z = \varphi(y), \tag{6}$$

dacă ecuaţia cu derivate parţiale (1) *a fost rezolvată în raport cu* r.

Mai general, problema lui Cauchy se poate enunţa astfel:

Definiţie. *Dîndu-se ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{7}$$

unde F *este o funcţie definită într-un anumit domeniu, o curbă strîmbă* (Γ) *şi o suprafaţă desfăşurabilă* (Δ) *definită de o familie de plane tangente la* (Γ), *să se determine o soluţie* $z = z(x, y)$ *a ecuaţiei* (7) *care să treacă prin* (Γ) *şi să fie tangentă la* (Δ) *de-a lungul acestei curbe.*

Definiţie. *Se numesc curbe caracteristice pentru ecuaţia* (1') *curbele aflate pe suprafeţele integrale ale acestei ecuaţii, ale căror proiecţii în planul* (x, y) *verifică ecuaţia caracteristicilor şi*

$$\frac{\partial F}{\partial r} y'^2 - \frac{\partial F}{\partial s} y' + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

De-a lungul caracteristicilor, problema Cauchy nu se poate rezolva prin teorema de existenţă.

Problema Cauchy scoate în evidenţă un element geometric esenţial în studiul ecuaţiilor de ordinul al doilea, *elementul de contact.*

Definiţie. *Se numeşte element de contact figura formată dintr-un punct* $P(x, y, z)$ *şi un element plan de parametru directori* p, q, -1 *cu centrul în* P.

Curba (Γ) împreună cu planele tangente de parametri directori p, q, -1 formează *o bandă de elemente de contact*, curba (Γ) fiind *suportul* acestei benzi.

O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea se numeşte *cvasiliniară*, dacă este liniară în raport cu derivatele de ordinul al doilea.

În cazul a două variabile independente, forma generală a ecuațiilor cvasiliniare va fi

$$A(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \tag{8}$$

unde coeficienții A, B și C sînt funcții reale, continue, derivabile și nu toate nule în același timp în domeniul considerat.

Definiție. *Se numește caracteristică a ecuației* (8) *o bandă de elemente de contact pentru care problema lui Cauchy este nedeterminată sau imposibilă.*

Curba (Γ), suportul unei caracteristici, se numește *curbă caracteristică.*

Pe orice suprafață integrală, cele două familii de curbe caracteristice se obțin prin integrarea ecuației diferențiale (ecuație caracteristică)

$$A(x, y)\,dy^2 - 2B(x, y)\,dx dy + C(x, y)dx^2 = 0. \tag{9}$$

Soluțiile acestei ecuații (9) vor fi *proiecțiile* curbelor caracteristice de pe suprafața integrală pe planul (x, y).

Se face următoarea clasificare:

1° $B^2 - AC > 0$, cele două familii de caracteristici sînt reale și distincte; ecuația este de *tip hiperbolic.*

2° $B^2 - AC = 0$, avem o singură familie de caracteristici reale; ecuația este de *tip parabolic.*

3° $B^2 - AC < 0$, cele două familii de caracteristici sînt complex conjugate; ecuația este de *tip eliptic.*

O proprietate importantă a fiecărei ecuații cvasiliniare este aceea că ea se poate reduce la o formă simplă, numită *forma ei canonică.*

Definiție. *Direcțiile*

$$\frac{dy}{dx} = \mu_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \mu_2(x, y) \tag{10}$$

determinate din ecuația (9) *se numesc direcții caracteristice ale ecuației* (8).

Aceste direcții determină tipul ecuației.

Prin integrarea ecuațiilor (10), se obțin două familii de curbe în planul (x, y)

$$\varphi_1(x, y) = C_1, \quad \varphi_2(x, y) = C_2, \quad (C_1, C_2 = \text{const}),$$

curbe care sînt proiecțiile pe planul (x, y) ale curbelor caracteristice.

Dacă $B^2 - AC > 0$, cu schimbarea de variabile

$$\xi = \varphi_1(x, y), \ \eta = \varphi_2(x, y).$$

ecuaţia (8) se aduce la *prima formă canonică*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + G_1\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) = 0. \tag{12}$$

Dacă se efectuează acum transformarea

$$\xi = x + y, \ \eta = x - y,$$

din ecuaţia (12) se obţine ecuaţia

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + G_1'\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

care este a *doua formă canonică* pentru ecuaţia cvasiliniară de tip hiperbolic.

Dacă $B^2 - AC = 0$, $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = \varphi(x, y)$. Cu schimbarea de variabile

$$\xi = \varphi(x, y), \ \eta = x$$

ajungem la forma canonică a ecuaţiei (8)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + G_2\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0. \tag{13}$$

Dacă $B^2 - AC < 0$, funcţiile $\varphi_1(x, y)$ şi $\varphi_2(x, y)$ sînt complex conjugate. Notînd cu $\alpha(\alpha, y)$ partea reală şi cu $\beta(x, y)$ partea imaginară a funcţiei $\varphi_1(x, y)$, avem

$$\varphi_1(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y); \ \varphi_2(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y).$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi = \alpha(x, y), \ \eta = \beta(x, y)$$

se ajunge la forma canonică a ecuaţiei (8)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + G_3\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0. \tag{14}$$

În cazul ecuaţiilor liniare şi omogene în raport cu derivatele de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{15}$$

(A, B, C sînt constante) ecuaţia diferenţială a proiecţiilor curbelor caracteristice pe planul (x, y) este

$$A\mathrm{d}y^2 - 2B\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + C\mathrm{d}x^2 = 0. \tag{16}$$

Direcţiile caracteristice

$$\mathrm{d}y - \mu_1\,\mathrm{d}x = 0,\ \mathrm{d}y - \mu_2\,\mathrm{d}x = 0$$

ne dau

$$y - \mu_1 x = C_1,\ y - \mu_2 x = C_2,\ (C_1,\ C_2 = \text{const}).$$

Dacă ecuaţia este de *tip hiperbolic*, cu schimbarea de variabile

$$\xi = y - \mu_1 x,\ \ \eta = y - \mu_2 x,$$

ea devine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \tag{17}$$

cu soluţia generală

$$z = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

unde $\varphi(\xi)$ şi $\psi(\eta)$ sînt funcţii arbitrare.

Revenind la vechile variabile, soluţia generală a ecuaţiei (15) este

$$z = \varphi(y - \mu_1 x) + \psi(y - \mu_2 x),$$

Dacă ecuaţia este de *tip parabolic*, avem $\mu_1 = \mu_2 = B/A$ şi ecuaţia diferenţială (16) se reduce la

$$A\mathrm{d}y - B\mathrm{d}x = 0$$

cu integrala generală

$$Ay - Bx = C,\ (C = \text{const}).$$

Schimbarea de variabile

$$\xi = Ay - Bx,\ \ \eta = x$$

aduce ecuaţia (15) la forma canonică

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} = 0. \tag{18}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (18) este

$$z = \eta f(\xi) + g(\xi),$$

unde $f(\xi)$ şi $g(\xi)$ sînt două funcţii arbitrare.

Soluţia generală a ecuaţiei (16) este

$$z = xf(Ay - Bx) + g(Ay - Bx).$$

În cazul ecuaţiei de *tip eliptic* forma sa canonică este ecuaţia Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0. \tag{19}$$

Ecuaţia omogenă a coardei vibrante sau ecuaţia undelor plane este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad a^2 = \frac{\rho}{T_0} \tag{20}$$

unde ρ este *masa specifică liniară* a coardei, iar T_0 *tensiunea* la care este supusă coarda în poziţia de repaus.

Soluţia ecuaţiei (20) care îndeplineşte condiţiile iniţiale

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x); \quad x \in [0, l],$$

unde $f(x)$ şi $g(x)$ sînt două funcţii date, este dată de formula lui d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} fg(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{21}$$

Această formulă se prelungeşte pentru toate valorile reale ale variabilelor x şi t.

Soluţie lui Bernoulli şi Fourier pentru ecuaţia vibraţiilor libere ale coardei (20) cu condiţiile la limită

$$u(0, t = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geqslant 0$$

şi condiţiile iniţiale

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x), \quad x \in [0, l]$$

este

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a}{l}t + B \sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

cu coeficienţii

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x.$$

Soluţia *ecuaţiei căldurii*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

(k fiind *coeficientul de conductibilitate termică*, c este *căldura specifică* iar ρ *densitatea*) care satisface condiţia iniţială

$$u(x, 0) = f(x); \qquad x \in R,$$

$f(x)$ fiind dată, continuă, mărginită şi absolut integrabilă pe $R = (-\infty, +\infty)$, este dată de relaţia

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}} d\tau; \quad t > 0.$$

Această formulă se generalizează uşor pentru R^2 sau R^3. Astfel soluţia ecuaţiei căldurii în spaţiul cu trei dimensiuni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

cu condiţia iniţială

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

este

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta) e^{\frac{-(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\xi)^2}{4at^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

în ipoteza că $f(x, y, z)$ este continuă, mărginită şi absolut integrabilă pe R^3.

Fie Ω in domeniu oarecare din planul (x, y) şi notăm cu (Γ) frontiera acestui domeniu.

Definiţie. *O funcţie continuă în domeniul închis $\Omega + \Gamma$ care admite derivate parţiale pînă la ordinul al doilea inclusiv în Ω şi satisface ecuaţia lui Laplace în Ω se numeşte funcţie armonică.*

Problema Dirichlet cere determinarea unei funcţii $u(P)$ armonice în Ω, continuă în $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ şi care pe (Γ) în valori continue date

$$u|_\Gamma = f(x, y).$$

Problema Neumann cere determinarea unei funcții $u(P)$ armonice în Ω, de clasă C^1 în $\overline{\Omega}$, care pe (Γ) este astfel încît

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(x, y),$$

$f(x, y)$ fiind o funcție continuă dată, iar n este normala exterioară la (Γ).

Soluția problemei lui Dirichlet pentru interiorul unui cerc cu centrul în origine și de rază a este dată de *formula lui Poisson*

$$u(r, \varphi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)d\theta}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

unde $u(a, \varphi) = f(\varphi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

PROBLEME

VII.1. Să se aducă la cele trei forme canonice ecuația

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

în cazul în care coeficienții a, b, d, e, f sînt constanți.

R. 1° Dacă $b^2 - ac > 0$, ecuația este de tip hiperbolic.

Ecuația caracteristică corespunzătoare este

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0,$$

de unde găsim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \tag{1}$$

Integralele generale ale ecuațiilcr diferențiale (1) sînt

$$\left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right)x - ay = C_1, \quad \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right)x - ay = C_2.$$

Vom face transformarea

$$\xi = \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right)x - ay, \quad \eta = \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right)x - ay$$

Exprimăm derivatele parţiale ale lui u cu variabilele noi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (b + \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial u}{\partial \xi} + (b - \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -a\frac{\partial u}{\partial \xi} - a\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (b + \sqrt{b^2 - ac})^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2ac\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (b - \sqrt{b^2 - ac})^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -a(b + \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - a(b - \sqrt{b^2 - ac})\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

După înlocuirea acestor expresii în ecuaţia dată obţinem forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u = 0.$$

cu

$$\alpha = \frac{bd + d\sqrt{b^2 - ac}}{4a(ac - b^2)}, \quad \beta = \frac{bd - d\sqrt{b^2 - ac}}{4a(ac - b^2)}, \quad \gamma = \frac{f}{4a(ac - b^2)}.$$

2° Dacă $b^2 - ac < 0$, ecuaţia este de tip eliptic. În acest caz transformarea este dată de

$$\xi = x\sqrt{ac - b^2}, \quad \eta = bx - ay, \quad ac - b^2 > 0.$$

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{ac - b^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -a\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (ac - b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2b\sqrt{ac - b^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -a\sqrt{ac - b^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - ab\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

iar forma canonică este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u = 0,$$

cu

$$\alpha = \frac{d}{a(ac - b^2)}, \ \beta = \frac{bd - ac}{a(ac - b^2)}, \ \gamma = \frac{f}{a(ac - b^2)}.$$

3° Dacă $b^2 - ac = 0$, $c \neq 0$, ecuația este de tip parabolic. Ecuația caracteristică corespunzătoare ne dă

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}.$$

Integrala generală a acestei ecuații este

$$bx - ay = C.$$

Facem transformarea

$$\xi = bx - ay, \quad \eta = y.$$

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -a \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -ab \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Forma canonică a ecuației este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u = 0,$$

cu

$$\alpha = \frac{bd - ac}{c}, \ \beta = \frac{a}{c}, \ \gamma = \frac{f}{c}.$$

VII.2. Să se determine soluția ecuației

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

care satisface condițiile

$$u(x, y)\Big|_{x=0} = y^3, \ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = y.$$

R. Ecuația este liniară și omogenă în raport cu derivatele de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți. Avem $B^2 - AC = \frac{25}{4} > 0$, deci ecuația este de tip hiperbolic.

Ecuația caracteristică corespunzătoare

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 7\frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

ne dă

$$\frac{dy}{dx} = -3, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}.$$

Soluțiile generale ale acestor ecuații diferențiale sînt

$$3x + y = c_1, \quad 2y + x = c_2, \quad (c_1, c_2 = \text{const}).$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi = 3x + y, \quad \eta = 2y + x$$

ecuația devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0,$$

cu soluția

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Soluția generală a ecuației date este

$$u(x, y) = f(3x + y) + g(x + 2y).$$

Ținînd seama de condițiile inițiale ale problemei lui Cauchy, găsim că funcțiile f și g trebuie să verifice următoarele identități:

$$\left.\begin{aligned} f(y) + g(2y) &= y^3 \\ 3f'(y) + g'(2y) &= y \end{aligned}\right\}$$

Integrînd a doua identitate în raport cu y obținem

$$\left.\begin{aligned} f(y) + g(2y) &= y^3 \\ 3f(y) + \frac{1}{2}g(2y) &= \frac{y^2}{2} + C \end{aligned}\right\} (C = \text{const}).$$

De aici rezultă

$$f(y) = \frac{1}{5}y^2 - \frac{1}{5}y^3 + K, \quad K = \text{const}).$$

$$g(2y) = \frac{6}{5}y^3 - \frac{1}{5}y^2 - K.$$

Deci

$$f(3x+y)=\frac{1}{5}(3x+y)^2-\frac{1}{5}(3x+y)^3+K,$$

$$g(x+2y)=\frac{3}{20}(x+2y)^3-\frac{1}{20}(x+2y)^2-K.$$

Soluția problemei lui Cauchy este

$$u(x,y)=\frac{1}{5}\left[(3x+y)^2-(3x+y)^3+\frac{3}{4}(x+2y)^3-\frac{1}{4}(x+2y)^2\right].$$

VII.3. Să se aducă la forma canonică și să se determine soluția generală a ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{(y+\sin x)^2+8}{16}u=0.$$

R. $B-AC=4>0$, deci ecuația este de tip hiperbolic. Ecuația caracteristică corespunzătoare

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\cos x\frac{dy}{dx}-(3+\sin^2 x)=0$$

ne dă

$$\frac{dy}{dx}=-\cos x\pm 2.$$

Aceste ecuații diferențiale au soluțiile generale

$$2x+\sin x+y=C_1,\quad 2x-\sin x-y=C_2.$$

Facem schimbarea de variabile

$$\xi=2x+\sin x+y,\quad \eta=2x-\sin x-y. \tag{1}$$

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(2+\cos x)\frac{\partial u}{\partial \xi}+(2-\cos x)\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(2+\cos x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2(4-\cos^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+(2-\cos x)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-$$
$$-\sin x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\sin x\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(2+\cos x)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-(2-\cos x)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

iar forma canonică a ecuației date este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\xi-\eta}{32}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\xi-\eta}{32}\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{(\xi-\eta)^2+32}{64}u = 0. \qquad (2)$$

În ecuația (2) facem transformarea

$$u(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{64}(\xi-\eta)^2} v(\xi, \eta).$$

Ecuația (2) devine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

cu soluția generală

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Soluția generală a ecuației (2) este

$$u(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{64}(\xi-\eta)^2}[f(\xi) + g(\eta)],$$

de unde soluția generală a ecuației date

$$u(x, y) = e^{-\frac{1}{16}(y+\sin x)^2}[f(2x + \sin x + y) + g(2x - \sin x - y)].$$

VII.4. Să se determine soluția ecuației

$$(l^2 - x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < l,$$

care satisface condițiile

$$u(x, y)\Big|_{y=0} = \arcsin\frac{x}{l}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 1.$$

R. Avem $B^2 - AC = l^2 - x^2 > 0$. Ecuația este de tip hiperbolic. Din ecuația caracteristică corespunzătoare

$$(l^2 - x^2)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

obținem

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}}.$$

Integrînd aceste ecuații, obținem

$$\arcsin\frac{x}{l} + y = C_1, \quad \arcsin\frac{x}{l} - y = C_2.$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi = \arcsin \frac{x}{l} + y, \quad \eta = \arcsin \frac{x}{l} - y$$

ecuaţia se reduce la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

cu soluţia generală

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$u(x, y) = f\left(\arcsin \frac{x}{l} + y\right) + g\left(\arcsin \frac{x}{l} - y\right).$$

Vom determina funcţiile f şi g utilizînd condiţiile iniţiale:

$$f\left(\arcsin \frac{x}{l}\right) + g\left(\arcsin \frac{x}{l}\right) = \arcsin \frac{}{l},$$

$$f'\left(\arcsin \frac{x}{l}\right) - g'\left(\arcsin \frac{x}{l}\right) = 1.$$

Notînd $\arcsin \frac{x}{l} = v$, acest sistem se scrie

$$\left.\begin{aligned} f(v) + g(v) &= v \\ f'(v) - g'(v) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

sau integrînd ecuaţia a doua

$$\left.\begin{aligned} f(v) + g(v) &= v \\ f(v) - g(v) &= v - v_0 \end{aligned}\right\} \quad (v_0 = \text{const}).$$

De aici rezultă

$$f(v) = v - \frac{v_0}{2}, \quad g(v) = \frac{v_0}{2}.$$

Deci soluţia ecuaţiei date este

$$u(x, y) = \arcsin \frac{x}{l} + y.$$

VII.5. Să se determine soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

care satisface condiţiile

$$u(x, y)\Big|_{y = \sin x} = x^4, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y = \sin x} = x.$$

R. Ecuaţia dată de tip hiperbolic, $B^2 - AC = 1$.
Ecuaţia caracteristică corespunzătoare este

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2 \cos x \frac{dy}{dx} - \sin^2 x = 0.$$

Rezultă ecuaţiile diferenţiale

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \pm 1.$$

Integrînd aceste ecuaţii, obţinem

$$\left.\begin{aligned} x + \sin x - y &= C_1 \\ x - \sin x + y &= C_2 \end{aligned}\right\} \quad (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Cu schimbarea de variabile

$$\xi = x + \sin x - y, \qquad \eta = x - \sin x + y$$

obţinem forma canonică a ecuaţiei date

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

cu soluţia generală

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei date este

$$u(x, y) = f(x + \sin x - y) + g(x - \sin x + y).$$

Pentru determinarea funcţiilor f şi g ne folosim de condiţiile iniţiale:

$$f(x) + g(x) = x$$
$$-f'(x) + g'(x) = x.$$

Integrînd ultima egalitate, obţinem sistemul

$$\left.\begin{aligned} f(x) + g(x) &= x^4 \\ -f(x) + g(x) &= \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}\right\} \quad (C = \text{const}),$$

de unde rezultă

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{C}{2} \text{ şi } g(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{C}{2}.$$

Soluţia problemei este

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(x + \sin x - y)^2 - \frac{1}{4}(x + \sin x - y)^2 + \frac{1}{2}(x - \sin x + y)^4 +$$
$$+ \frac{1}{4}(x - \sin x + y)^2$$

VII.6. Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei lui Euler

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

R. Ecuaţia se mai scrie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

și este de tip hiperbolic.

Vom face schimbarea de funcție $u(x, y) = \frac{v(x, y)}{x}$. Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{x^2}v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2}{x^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{x^3}v, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Înlocuind aceste expresii în ecuația dată, se obține ecuația

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare este

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

iar integralele generale ale acestor ecuații diferențiale sînt

$$x + y = C_1, \qquad x - y = C_2, \qquad (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Cu transformarea

$$x + y = \xi, \qquad x - y = \eta$$

ecuația (2) devine

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

și are soluția generală

$$v = f(\xi) + g(\eta)$$

Rezultă

$$v(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$$

și

$$u(x, y) = \frac{f(x + y) + g(x - y)}{x}.$$

VII.7. Să se determine soluția ecuației

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

care satisface condiţiile

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x). \tag{2}$$

R. Făcînd în ecuaţia dată schimbarea de funcţie

$$u(x, t) = \frac{v(x, t)}{h - x}.$$

obţinem ecuaţia coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Soluţia acestei ecuaţii care satisface condiţiile

$$v(x, t)\Big|_{t=0} = (h - x), \quad f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = (h - x)F(x)$$

[condiţii obţinute din (2)] este dată de formula lui d'Alembert şi anume

$$v(x, t) = \frac{(h - x + at)f(x - at) + (h - x - at)f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} (h - \tau)\, F(\tau)d\tau.$$

Soluţia $u(x, t)$ a problemei lui Cauchy se poate scrie

$$u(x, t) = \frac{(h - x + at)f(x - at) + (h - x - at)f(x + at)}{2(h - x)} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{h - \tau}{h - x} F(\tau)d\tau.$$

VII.3. Se consideră o bară elastică de lungime a, fixată la extremitatea $x = 0$ şi supusă acţiunii unei forţe $f(t)$ pe unitatea de suprafaţă la extremitatea $x = a$ (fig. VII.8, a).

Ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale care dă deplasarea longitudinală $z(x, t)$ a unei molecule a barei este

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\delta}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

unde μ este modulul de elasticitate, iar δ masa specifică a barei.

Presupunem că avem satisfăcute condițiile

$$z(x, 0) = 0, \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, z(0, t) = 0, \quad \mu \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=a} = F(t)$$

cu $0 < x < a$, $t > 0$.

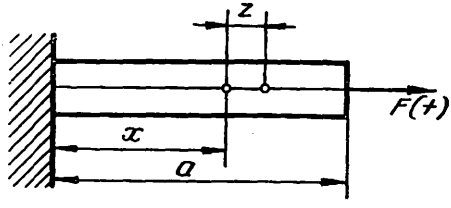


Fig. VII.a,

Să se calculeze deplasarea longitudinală $z(a, t)$ în extremitatea $x = a$ în următoarele cazuri :

$$1^\circ \; F(t) = F_0, \qquad \text{(tracțiune)},$$

$$2^\circ \; F(t) = -F_0, \quad \text{(compresiune)}.$$

R. Notînd $Lz(x, t) = Z(x, p)$ și ținînd seama de condițiile inițiale rezultă

$$L\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = p^2 Z(x, p), \quad L\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2},$$

deoarece $Z(x, p) = p\int_0^\infty z(x, t)\, e^{-pt}\, dp$,

$$L\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2 Z}{dx^2}.$$

Ecuația operațională corespunzătoare ecuației date este ecuația diferențială

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} - p^2 \frac{\delta}{\mu} Z = 0$$

cu soluția generală

$$Z(x, p) = Ae^{-p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}x} + Be^{p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}x}.$$

Punînd condiția $z(0, t) = 0$ sau $Z(0, p) = 0$ rezultă

$$A + B = 0,$$

apoi pentru $x = a$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_0}{\mu} \text{ și } L\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

deci

$$\frac{F_0}{\mu} = -p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}Ae^{-p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a} + p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}Be^{p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a} = 2p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}B\,\mathrm{ch}\,p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a.$$

Rezultă

$$B = \frac{F_0}{2p\mu\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\,\mathrm{ch}\,p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a} = -A$$

și

$$Z(x, p) = \frac{F_0}{2p\mu\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}\,\mathrm{ch}\,p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a}\left(e^{p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}x} - e^{-p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}x}\right) = \frac{F_0\,\mathrm{th}\,p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}a}{p\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}}.$$

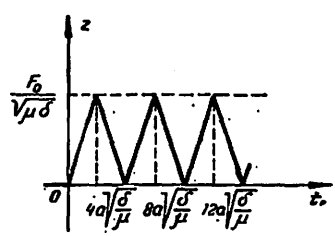


Fig. VII.8, *b*

Transformata inversă a acestei funcții este

$$z(x, t) = L^{-1}Z(x, p) = \frac{F_0}{u\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}}I_T(c, t) = \frac{F_0}{\sqrt{\mu\delta}}I_T(c, t),$$

unde I_T reprezintă funcția impuls triunghiulară (fig. VII.8, *b*).

În cazul 2°, $F = -F_0$ se regăsește rezultatul anterior cu $-F_0$. Figura este simetrică în raport cu axa Ot.

VII.9. O coardă omogenă de lungime l, fixată la extremitățile $x = 0$ și $x = l$ vibrează sub acțiunea unei forțe perturbatoare exterioare $\rho F(x, t)$, repartizată în mod continuu de-a lungul întregii coarde. Să se determine devierea coardei de la poziția de echilibru, ținînd seama de oscilațiile ei libere, produse de devierea și viteza inițială.

R. Ecuația oscilațiilor întreținute este de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t). \tag{1}$$

Pentru a integra ecuația dată, vom folosi proprietatea ecuațiilor neomogene, de a se putea integra dacă știm să integrăm ecuația omogenă corespunzătoare și dacă cunoaștem o soluție particulară a ecuației neomogene.

Integrala acestei ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea neomogene o vom determina sub forma sumei

$$u = u_0 + u_1.$$

unde u_0 este integrala ecuației omogene $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, care satisface condițiile

$$u_0|_{x=0} = 0, \quad u_0|_{x=l} = 0, \quad u_0\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u_0}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x). \tag{2}$$

iar u_1 este integrala ecuației omogene supusă condițiilor

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_1|_{x=l} = 0, \quad u_1\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Pentru a determina soluția ecuației omogene utilizăm metoda separării variabilelor. Căutăm o soluție de forma

$$u_0(x, t) = T(t)S(x) \tag{4}$$

și astfel ca să avem satisfăcute condițiile la limită

$$S(0) = 0, \quad S(l) = 0. \tag{5}$$

Înlocuind funcția (4) în ecuația omogenă a coardei vibrante, găsim

$$ST'' = a^2 S'' T$$

sau împărțind cu ST

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{S''}{S} = -\lambda \qquad (\lambda = \text{const}).$$

Obținem următoarele două ecuații diferențiale

$$T'' + \lambda T = 0, \tag{6}$$

$$S'' + \frac{\lambda}{a^2} S = 0. \tag{7}$$

Ecuațiile (6) și (7) sînt de ordinul al doilea, liniare și cu coeficienți constanți. Soluțiile lor se exprimă cu funcții exponențiale dacă $\lambda < 0$, cu un polinom de gradul întîi dacă $\lambda = 0$ și cu funcții trigonometrice dacă $\lambda > 0$. Vom examina fiecare caz în parte.

1° Fie $\lambda < 0$. În acest caz soluția generală a ecuației (7) este

$$S(x) = C_1 e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x}, \qquad (C_1, C_2 = \text{const}),$$

iar condițiile (5) conduc la următorul sistem liniar și omogen în C_1 și C_2;

$$\left.\begin{aligned} &C_1 + C_2 = 0 \\ &C_1 e^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}l} + C e^{-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}l} = 0. \end{aligned}\right\}.$$

Determinantul acestui sistem eate diferit de zero, deci sînt posibile numai soluțiile banale $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. În consecință pentru $\lambda < 0$, ecuația nu admite nici o soluție nebanală care să satisfacă condițiile date.

2° Fie $\lambda = 0$. Soluția generală a ecuației (7) este

$$S(x) = C_1 x + C_2, \qquad (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Condițiile (5) ne dau

$$S(0) = C_2 = 0; \qquad S(l) = C_1 l = 0, \qquad \text{deci } C_1 = 0.$$

Astfel ajungem din nou la soluția banală.

3° Fie $\lambda > 0$. În acest caz avem

$$S(x) = C \cos \frac{\sqrt{\lambda}}{a} x + C \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{a} x.$$

Condițiile (5) conduc la următoarele egalități;

$$S(0) = C_1 = 0,$$

$$S(l) = C_2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{a} l = 0.$$

Pentru a nu ajunge la soluția banală, acceptăm $C_2 \neq 0$, deci

$$\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{a} l = 0,$$

de unde rezultă

$$\sqrt{\lambda} = \frac{na\pi}{l}, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Soluția ecuației (7) corespunzătoare lui $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi a}{l}$ este

$$S_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \qquad (C_n = \text{const})$$

Ecuația (7) admite un șir infinit de soluții nebanale care satisfac condițiile (5). Pentru λ astfel determinat ecuația (6) se scrie

$$T'' + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T = 0$$

a cărei soluție generală $T_n(t)$ este

$$T_n(t) = E_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + F \sin \frac{n\pi a}{l} t, \qquad (E_n,\ F_n = \text{const}).$$

Notăm

$$u_{0,n}(x,\ t) = S_n(x) T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B \sin \frac{n\pi a}{l} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Presupunem că există suma seriei

$$u_0(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t\right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

și că $u_0\ (x,\ t)$ este soluția problemei lui Cauchy, deci sînt satisfăcute condițiile inițiale (2) ale problemei:

$$u_0(x,\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x),$$

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x).$$

Această relație reprezintă dezvoltarea funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$ în serii Fourier, deci coeficienții acestor serii sînt

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\tau) \sin \frac{n\pi\tau}{l} d\tau,$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l g(\tau) \sin \frac{n\pi}{l} \tau d\tau.$$

Rezultă

$$u_0(x,\ t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{l} \cos \frac{n\pi a}{l} t \cdot \int_0^l f(\tau) \sin \frac{n\pi}{l} \tau d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{}{an\pi} \sin \frac{n\pi a}{l} t \cdot \int_0^l g(\tau) \sin \frac{n\pi}{l} \tau d\tau\right] \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x. \qquad (9)$$

Ne-a mai rămas să determinăm o soluție particulară pentru ecuația neomogenă. Fie $u_1(x, t)$ soluția particulară căutată; vom presupune că această soluție verifică ecuația neomogenă (1) și condițiile inițiale și la limite omogene (3).

Printr-o extensie a metodei variației constantelor vom căuta soluția particulară $u_1(x, t)$ de forma soluției omogene, și anume

$$u_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) S_k(x), \tag{10}$$

unde $A_k(t)$ sînt funcții de t deocamdată nedeterminate, iar S_k sînt funcțiile proprii, ale problemei Sturm-Liouville (7).

Impunînd lui (7) condițiile $u_1(x, 0) = 0$, $\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, rezultă imediat

$$A_k(0) = 0, \quad A_k'(0) = 0. \tag{11}$$

Impunem lui (10) condiția să verifice ecuația (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t) S_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) S_k''(x) + F(x, t)$$

și deoarece $S_k(x)$ verifică (7) pentru $\lambda = \lambda_k = \frac{k\pi a}{l}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ ultima relație se scrie

$$\sum_{k=1}^{\infty} [A_k''(t) + \lambda_k a^2 A_k(t)] \cdot S_k(x) = F(x, t).$$

De aici rezultă

$$A_k''(t) + a^2 \lambda_k A_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k \geqslant 0 \tag{12}$$

unde

$$F_k(t) = \int_0^l F(x, t) S_k(x) \mathrm{d}x.$$

Atasînd ecuației (12) condițiile Cauchy (11), obținem soluția acestei ecuații diferențiale ca fiind

$$A_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^l F(\xi, \tau) S_k(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k}(t - \tau) \mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^l F(\xi, \tau) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \cdot \sin \frac{n\pi a}{l} (t - \tau) \mathrm{d}\tau.$$

Rezultă

$$u_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \int_0^t d\tau \int_0^l F(\xi, \tau) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \cdot \sin \frac{n\pi a}{l} (t - \tau)\, d\xi.$$

Adunînd (9) cu (13) obţinem soluţia problemei.

În (13) permutînd operaţia de însumare cu cele două operaţii de integrare vom putea scrie

$$u_1(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t - \tau)\, F(\xi, \tau)\, d\xi.$$

unde

$$G(x, \xi, t - \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi \cdot \sin \frac{n\pi a}{l} (t - \tau)$$

este funcţia lui Green pentru prima problemă la limită pentru ecuaţia (1). Ea verifică pentru $t \neq \tau$ ecuaţia omogenă

VII.10. Să se aducă la forma canonică şi să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

R. Avem $A = x^2$, $B = -xy$, $C = y^2$ şi $B^2 - AC = 0$. Ecuaţia este de tip parabolic. Ecuaţia caracteristică corespunzătoare este

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

Rezultă

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

cu soluţia generală $xy = c$ ($c = \text{const}$).

Facem transformarea

$$xy = \xi, \quad x = \eta.$$

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u \partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Ecuaţia dată devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \tag{2}$$

Aceasta este forma canonică a ecuaţiei date.
Scriem ecuaţia (2) sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Rezultă

$$\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\xi). \tag{3}$$

Soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de primul ordin, (3), este

$$u = f(\xi) \ln \eta + g(\xi),$$

deci soluţia generală a ecuaţiei date este

$$u(x, y) = f(xy) \ln x + g(xy).$$

VII.11. Se consideră un cilindru solid de lungime infinită a cărui temperatură iniţială este zero şi a cărui suprafaţă este menţinută la temperatura $u = 1$ începînd de la $t = 0$ (fig. VII.11). Alegînd pentru simplificare raza cilindrului $r = 1$ şi pentru o alegere judicioasă a unităţii de timp, ecuaţia difuziunii termice este

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}, \tag{1}$$

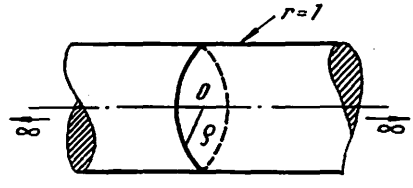


Fig. VII.11

unde $u(\rho, t)$ este funcţie de temperatură, ρ fiind distanţa de la un punct al cilindrului la axă.

Să se determine $u(\rho, t)$ care satisface condiţiile la limită

$$u(\rho, 0) = 0, \qquad 0 \leqslant \rho < 1, \tag{2}$$

$$u(1, t) = 1, \qquad t > 0. \tag{3}$$

În plus funcţia $u(\rho, t)$ este finită pentru $\rho = 0$.

R. Cu notația $U(\rho, p) = \mathcal{L}u(p, t)$, ecuația operațională corespunzătoare ecuației date este

$$pU = \frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho}$$

sau

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho} - pU = 0.$$

Această ecuație este o ecuație Bessel, cu soluția

$$U = AJ_0(i\,\rho\sqrt{p}) + BY_0(i\,\rho\sqrt{p}),$$

unde J_0 este funcția lui Bessel de prima speță și de ordin zero iar Y_0 funcția de speța a doua și de ordin zero.

În condițiile specificate plus faptul că $u(\rho, t)$ este finită pentru $\rho = 0$, trebuie să luăm $B = 0$ deoarece $Y_0(0) = -\infty$, deci

$$U = AJ_0(i\,\rho\sqrt{p}).$$

Reamintim că

$$J_0(iz) = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{z^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \dots$$

Pentru determinarea lui A utilizăm condiția (3):

$$\frac{1}{p} = AJ_0(i\sqrt{p}),$$

deci

$$U(\rho, p) = \frac{J_0(i\,\rho\sqrt{p})}{pJ_0(i\sqrt{p})}.$$

Avem

$$u(\rho, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}U(\rho, p)\,dp = \Sigma\,\mathrm{Rez}[e^{pt}U(\rho, p)]$$

situate la stînga dreptei de abscisă c.

Funcția $J_0(z)$ se anulează pentru următoarele valori:

$$\alpha_1 = \pm 2{,}4048, \quad \alpha_2 = \pm 5{,}5200, \quad \alpha_3 = \pm 8{,}6597, \dots$$

Funcția $\dfrac{e^{pt}J_0(i\,\rho\sqrt{p})}{pJ_0(i\sqrt{p})}$ are polii simpli $p = 0$ și $p = -\alpha_n^2$.

$$\operatorname*{Rez}_{p=0} \frac{e^{pt}J_0(i\,\rho\sqrt{p})}{pJ_0(i\sqrt{p})} = \frac{e^{pt}J_0(i\,\rho\sqrt{p})}{J_0(i\sqrt{p})}\bigg|_{p=0} = 1,$$

$$\operatorname*{Rez}_{p=-\alpha_n^1} \frac{e^{pt}J_0(i\,\rho\sqrt{p})}{pJ_0(i\sqrt{p})} = \frac{e^{pt}J_0(i\,\rho\sqrt{p})}{J_0(i\sqrt{p}) + i\dfrac{\sqrt{p}}{2}J_0'(i\sqrt{p})}\bigg|_{p=-\alpha_n^2} =$$

$$= 2\,\frac{e^{-\alpha_n^2 t}J_0(\alpha_n\rho)}{\alpha_n^2 J_0'(\alpha_n\rho)} = -2\,\frac{J_0(\alpha_n\rho)}{\alpha_n J_1(\alpha_n\rho)}\,e^{-\alpha_n^2 t}.$$

deoarece $J_0'(z) = -J_1(z)$. Rezultă

$$u(\rho, t) = \mathcal{L}^{-1}U(\rho, p) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n\rho)}{\alpha_n J_1(\alpha_n\rho)}\,e^{-\alpha_n^2 t}. \tag{4}$$

Putem scrie formula (4) într-un sistem cu trei dimensiuni (L lungimea, M masa, T timpul), spre exemplu fie r distanța de la un punct al cilindrului la axă și τ timpul în secunde. Dacă raza cilindrului este r_0 și coeficientul de difuzare termică k, atunci ecuația (1) se scrie

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = k\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Notînd $\rho = \dfrac{r}{r_0}$, $t = \dfrac{k\tau}{r_0^2}$, $v(r_0, \tau) = V_0$ (temperatura arbitrară pe suprafață), rezultă

$$v(r, \tau) = V_0\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\alpha_n\dfrac{r}{r_0}\right)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}\,e^{-\alpha_n^2\frac{k\tau}{r_0^2}}\right].$$

VII.12. Se consideră un solid semiinfinit a cărui frontieră este formată dintr-un plan perpendicular pe Ox în O. Se presupune că la timpul $t < 0$ solidul se află la temperatura $v = 0$, apoi, brusc, la timpul $t = 0$, se aplică un flux caloric $\Phi = \text{const}$ pe suprafața planului și se menține acest flux constant. Să se determine variația temperaturii $v(x, t)$ în lungul lui Ox (fig. VII.12).

R. Problema revine la determinarea soluției sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$\frac{\partial v}{\partial t} = K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$\Phi = -K\frac{\partial v}{\partial x}, \quad K = \frac{k}{c\delta}\ \text{(conductibilitatea)},$$

c este căldura specifică, δ densitatea, care satisfac condițiile

$$v(x,\ 0) = 0, \qquad -K\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \Phi_0, \qquad \lim_{x\to\infty} v(x,\ t) = 0.$$

Aplicînd operatorul Carson-Laplace primei ecuații din (1) și ținînd seama de faptul că

$$L\frac{\partial v}{\partial t} = pV(x,\ p) - pv(x,\ 0) = pV(x,\ p) \text{ cu } V(x,\ p) = Lv(x,\ t)$$

$$L\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = p\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{-pt} dt,$$

obținem ecuația operațională

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{p}{K} V = 0$$

cu soluția

$$V(x,\ p) = Ae^{\sqrt{\frac{p}{K}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{p}{K}}x}.$$

Condiția $\lim\limits_{x\to\infty} v(x,\ t) = 0$ ne dă

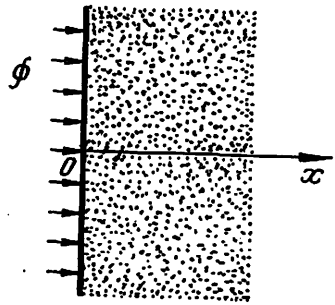


Fig. VII.12

$$\lim_{x\to\infty}\left(Ae^{+\sqrt{\frac{p}{K}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{p}{K}}x}\right) = 0, \text{ de unde rezultă } A = 0, \text{ deci}$$

$$V(x,\ p) = Be^{-\sqrt{\frac{p}{K}}x}.$$

Din relația $\Phi_0 = -K\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}$ obținem prin transformarea

$$\Phi_0 = -KL\frac{\partial v}{\partial x} = -K\frac{\partial}{\partial x}(Lv) = k\sqrt{\frac{p}{K}}\,Be^{-\sqrt{\frac{p}{K}}x}\Big|_{x=0}$$

sau

$$B = \frac{\Phi}{k} \cdot \sqrt{\frac{K}{p}}.$$

Rezultă

$$V(x, p) = \frac{\Phi}{k} \sqrt{\frac{K}{p}} e^{-\sqrt{\frac{p}{K}} x}$$

şi

$$v(x, t) = L^{-IV}(x, p) = \frac{\Phi_0}{k} \sqrt{K} \left(2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - \frac{x}{\sqrt{K}} \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right).$$

VII.13. Să se determine distribuţia temperaturii $T(x, t)$ într-un solid infinit dacă avem dat $T(x, 0) = f(x)$.

R. Avem de determinat soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

cu condiţia dată.

Pentru varietate, vom utiliza transformata Fourier a unei funcţii de două variabile

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(K, t) e^{iKx} dK,$$

$$F(K, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, t) e^{-iKx} dx.$$

Avem ecuaţia

$$-K^2 F(K, t) = \frac{1}{K} \frac{\partial F(K, t)}{\partial t}$$

cu soluţia

$$F(K, t) = \Phi(K) e^{-K^2 t}$$

Condiţia iniţială ne dă

$$F(K, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, 0) e^{-iKx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iKx} dx$$

Deci

$$\Phi(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iKx} dx$$

și

$$F(K,\ t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kx}\mathrm{e}^{-K^2}$$

Inversînd transformata Fourier, obținem

$$T(x,\ t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx}\mathrm{d}K\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kx'}\,\mathrm{e}^{-K^2t}f(x')\mathrm{d}x' =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}K(x-x')}\,\mathrm{e}^{-K^2t}\mathrm{d}K = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{4\pi Kt}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-x')^2}{4Kt}} f(x')\mathrm{d}x'.$$

Funcția

$$G(x,\ t;\ x') = \sqrt{\frac{1}{4\pi Kt}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-x')^2}{4Kt}}$$

este funcția Green pentru problema dată.

Presupunem că $f(x)$ constă din sursa plană $\delta(x)$. Atunci

$$T(x,\ t) = \sqrt{\frac{1}{4K\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Kt}} = G(x,\ t;\ 0). \qquad (1)$$

Aceasta este o dependență gaussiană de x cu o lățime crescînd ca și $\sqrt{t}$ (fig. VII.13, *a*).

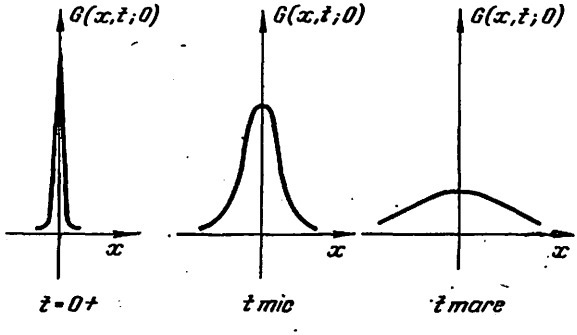


Fig. VII.13, *a*

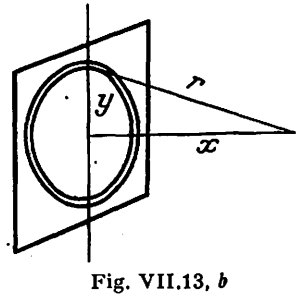


Fig. VII.13, *b*

Care este distribuția rezultată de la sursa punct $\delta(\bar{x})$ la timpul $t = 0$?

Fie $f(x,\ t)$ reacția la o sursă plan $\delta(x)$ la $t = 0$. Fie $g(r,\ t)$ reacția la o sursă punct $\delta(\bar{x})$ la $t = 0$. Atunci din fig. VII.13, *b* se vede că

$$f(x,\ t) = 2\pi\int_{0}^{\infty} yg(r,\ t)\ \mathrm{d}y = 2\pi\int_{x}^{\infty} rg(r,\ t)\mathrm{d}r.$$

Deci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\pi x g(x, t),$$

$$g(r, t) = -\frac{1}{2\pi r}\left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\right]_{x=r}.$$

Utilizînd (1) obținem imediat

$$g(r, t) = \left(\frac{1}{4\pi Kt}\right)^{3/2} e^{-\frac{r^2}{4Kt}}.$$

VII.14. Să se determine soluția ecuației lui Laplace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

în semiplanul superior ($y > 0$), care satisface condițiile

$$\varphi \to 0 \text{ cu } y \to \infty; \tag{1}$$

$$\varphi = e^{-ax}, (a > 0), \text{ pentru } y = 0, x > 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Ce^{bx}, (b > 0), \text{ pentru } y = 0, x < 0. \tag{3}$$

R. Fie

$$\varphi(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0} = g(x).$$

Din (2) și (3) avem $f(x)=e^{-ax}$ pentru $x>0$ și $g(x)=Ce^{bx}$ pentru $x<0$, rămînînd de determinat valorile lui $f(x)$ pentru $x<0$ și ale lui $g(x)$ pentru $x>0$.

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}F(k, y)dk.$$

unde funcția $f(k, y)$ satisface ecuația

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - k^2 F = 0.$$

Atunci

$$F(k, y) = \Phi(k)e^{-|k|y} \text{pentru } k \text{ real}$$

Extindem funcția $F(k, y)$ în planul complex k, înlocuind funcția $|k|$ pentru k real $\sqrt{k^2+\lambda^2}$, introducînd tăieturile din fig. VII.14 și rădăcina definită prin $\sqrt{k^2+\lambda^2} \to +k$ cu Re $k \to +\infty$. Apoi vom face $\lambda \to 0$. Atunci

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, e^{-\sqrt{k^2+\lambda^2}}\,\Phi(k)\mathrm{d}k \qquad (2)$$

și

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\Phi(k)\mathrm{d}k,$$

$$g(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k^2+\lambda^2}\, e^{ikx}\Phi(k)\mathrm{d}k.$$

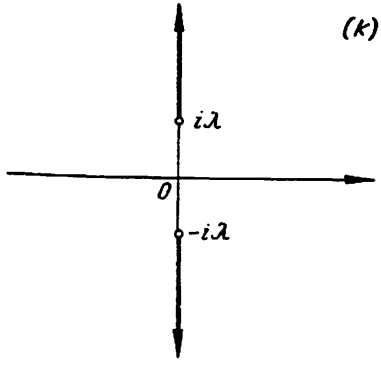


Fig. VII.14

Inversînd ultimele două transformări Fourier, avem

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} e^{-ikx}f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-ikx}f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \Phi_+(k) + \int_0^{\infty} e^{-ikx}e^{-ax}\mathrm{d}x = \Phi_+(k) + \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{k+ia} \qquad (3)$$

și similar

$$\Phi(k)\sqrt{k^2+\lambda^2} = \Phi_-(k) + \frac{C}{i}\cdot\frac{1}{k+ib} \qquad (4)$$

unde $\Psi_+(k)$ este transformata Fourier a unei funcții care tinde la zero pentru $x>0$ iar $\Psi(k)$ este transformata Fourier a unei funcții care tinde la zero pentru $x<0$.

Egalînd (3) și (4) obținem

$$\sqrt{k^2+\lambda^2}\,\Phi_+(k) + \frac{1}{i}\,\frac{\sqrt{k^2+\lambda^2}}{k-ia} = \Phi_-(k) + \frac{C}{i}\cdot\frac{1}{k+ib}$$

sau

$$\underbrace{\sqrt{k+i\lambda}\,\Phi_+(k)}_{F_+(k)} - \underbrace{\frac{\Phi_-(k)}{\sqrt{k-i\lambda}}}_{F_-(k)} = \underbrace{\frac{C}{i}\cdot\frac{1}{k+ib}\,\frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}} - \frac{1}{i}\,\frac{\sqrt{k+i\lambda}}{k-ia}}_{F(k)}.$$

Avem

$$\frac{1}{k+ib}\,\frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}}=\frac{1}{k+ib}\left[\frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}}-\frac{1}{\sqrt{-ib-i\lambda}}\right]+\frac{1}{\sqrt{-ib-i\lambda}}\cdot\frac{1}{k+ib}=$$

$$=\frac{1}{k+ib}\left[\frac{1}{\sqrt{k-i\lambda}}+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b+\lambda}}\right]+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b+\lambda}}\,\frac{1}{k+ib}$$

şi

$$\frac{\sqrt{k+i\lambda}}{k-i\lambda}=\frac{1}{k-ia}\left[\sqrt{k+i\lambda}-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{a+\lambda}\right]+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{a+\lambda}\,\frac{1}{k-ia}\cdot$$

Deci

$$F_+(k)=\frac{C}{i}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{b+\lambda}}\,\frac{1}{k+ib}-\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{k-ia}\left[\sqrt{k+i\lambda}-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{a+\lambda}\right]\cdot$$

Rezultă

$$\Phi(k)=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k+i\lambda}}\left[\frac{\sqrt{a+\lambda}}{k-ia}+\frac{C}{\sqrt{b+\lambda}}\,\frac{1}{k+ib}\right]\cdot$$

Putem trece acum la limită pentru $\lambda\to 0$:

$$\sqrt{k+i\lambda}\to\begin{cases}\sqrt{k}, \text{ pentru } k>0,\\ i\sqrt{-k}, \text{ pntru } k<0.\end{cases}$$

Atunci

$$\Phi(k)=\begin{cases}\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{k}}\left[\dfrac{\sqrt{a}}{k-ia}+\dfrac{C}{\sqrt{b}}\cdot\dfrac{1}{k-ib}\right], \text{ pentru } k>0\\[2ex] \dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{-k}}\left[\dfrac{\sqrt{a}}{k-ia}+\dfrac{C}{\sqrt{b}}\cdot\dfrac{1}{k+ib}\right], \text{ pentru } k<0.\end{cases}$$

Soluţia problemei este dată de

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}e^{ikx}\cdot e^{-|k|y}\Phi(k)dk=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1-i}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{\sqrt{a}}{k-ia}+\frac{C}{\sqrt{b}}\,\frac{1}{k+ib}\right)e^{ikx}e^{-ky}dk\right]\cdot$$

Să evaluăm integrala

$$I=\int_0^\infty\frac{e^{-ux}}{\sqrt{x}(x+a)}\,dx=e^{au}\int_a^\infty\frac{e^{-uy}}{y\sqrt{y-a}}\,dy.$$

Notăm

$$J = \int_a^\infty \frac{e^{-uy}}{y\sqrt{y-a}}\,dy.$$

Avem

$$\frac{\partial J}{\partial y} = -\int_a^\infty \frac{e^{-uy}}{\sqrt{y-a}}\,dy = -\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-au}}{\sqrt{u}}\,.$$

deci

$$J(u,\ a) = -\sqrt{\pi}\int_0^u \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}\,dt + C(a).$$

Dacă $u = 0$,

$$J(u,\ a) = \int_a^\infty \frac{dy}{y\sqrt{y-a}} = 2\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+a} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}\,,\ (y-a=z^2).$$

Atunci $C(a) = \dfrac{\pi}{\sqrt{a}}$ și

$$J(u,\ a) = \frac{\pi}{\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\int_0^{\sqrt{au}} e^{-z^2}\,dz = \frac{\pi}{\sqrt{a}}\,(1 - \operatorname{erf}\sqrt{au})$$

și

$$I(u,\ a) = \frac{\pi}{\sqrt{a}}\,e^{au}(1 - \operatorname{erf}\sqrt{au}).$$

Deci

$$\varphi(x,\ y) = \operatorname{Re}\left[e^{-az}(1 - \operatorname{erf}\sqrt{-az}) - i\,\frac{C}{b}\,e^{bz}(1 - \operatorname{erf}\sqrt{bz})\right]$$

unde $z = x + iy$.

VII.15. Să se rezolve problema lui Dirichlet pentru dreptunghiul definit de relațiile $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $a, b > 0$ știind că pe frontieră avem

$$u(0,\ y) = f_0(y),\quad u(a,\ y) = f_1(y),\quad u(x,\ 0) = g_0(x),\quad u(x,\ b) = g_1(x),$$

funcțiile $f_0(y)$, $f_1(y)$, $g_0(x)$ și $g_1(x)$ fiind date iar în vîrfurile dreptunghiului avem $f_0(0) = g_0(0)$, $f_1(0) = g_0(a)$, $f_0(b) = g_1(0)$ și $f_1(b) = g_1(a)$.

R. Vom căuta o soluție a ecuației $\Delta u = 0$ sub forma

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$$

cu

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta u_2 = 0,$$

iar pe frontieră avem

$$\begin{aligned} u_1(0, y) &= f_0(y), & u_1(x, 0) &= 0, \\ u_1(a, y) &= f_1(y), & u_1(x, b) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

și

$$\begin{aligned} u_2(0, y) &= 0, & u_2(x, 0) &= g_0(x), \\ u_2(a, y) &= 0, & u_2(x, b) &= g_1(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Am ajuns la două probleme de tip Dirichlet însă cu condiții pe frontieră mai simple. Pentru a determina soluția ecuației $\Delta u_1 = 0$ care satisface condițiile (1), vom utiliza metoda lui Fourier și anume vom determina soluțiile de forma

$$u_1(x, y) = S(x)R(y)$$

și astfel că să avem satisfăcute condițiile

$$R(0) = 0, \quad R(b) = 0. \tag{3}$$

Înlocuind această funcție în ecuația $\Delta u_1 = 0$, obținem

$$S''(x)R(y) + S(x)R''(y) = 0.$$

de unde rezultă

$$\frac{S''(x)}{S(x)} = -\frac{R''(y)}{R(y)} = k, \qquad (k = \text{const}).$$

Obținem următoarele ecuații diferențiale

$$S'' - kS = 0, \tag{4}$$

$$R'' + kR = 0. \tag{5}$$

Fie $k < 0$. În acest caz soluția generală a ecuației (5) este

$$R(y) = C_1 e^{\sqrt{-k}y} + C_2 e^{-\sqrt{-k}y}, \qquad (C_1, C_2 = \text{const}),$$

iar condițiile (3) conduc la următorul sistem liniar și omogen în C_1 și C_2.:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 e^{\sqrt{-k}b} + C_2 e^{-\sqrt{-k}b} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Determinantul acestui sistem este *diferit de zero*, deci sînt posibile numai soluțiile banale, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Deci pentru $k < 0$, *ecuația nu admite nici o soluție nebanală* care să satisfacă condițiile date.

Dacă $k = 0$, soluția generală a ecuației (5) este

$$R(y) = C_1 y + C_2 \qquad (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Condițiile (3) ne dau $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Și în acest caz ajungem la o soluție banală Pentru $k > 0$ soluția generală a ecuației (5) este

$$R(y) = C_1 \cos\sqrt{k}y + C_2 \sin\sqrt{k}y, \ (C_1, \ C_2 = \text{const}).$$

Condițiile (3) conduc la următoarele egalități:

$$R(0) = C_1 = 0.$$

$$R(b) = C_2 \sin\sqrt{k}b = 0.$$

Pentru a nu ajunge la soluția banală, acceptăm $C_2 \neq 0$, deci

$$\sin\sqrt{k}b = 0,$$

de unde rezultă

$$k = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Soluția ecuației (5) corespunzătoare lui k astfel determinat este

$$R_n(y) = C_n \sin\frac{n\pi}{b}y, \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ecuația (5) admite un șir infinit de soluții nebanale care satisfac condițiile (3). Pentru k determinat mai sus, ecuația (4) se scrie

$$S''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 S(x) = 0$$

și are soluția generală

$$S_n(x) = E_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + F_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}, \ (E_n, F_n = \text{const}).$$

Notăm

$$u_{1,n}(x, y) = \left(A_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right) \sin\frac{n\pi}{b}y.$$

Presupunem că există suma seriei

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + B_n e^{\frac{n\pi}{b}x}\right) \sin\frac{n\pi}{b}y$$

și că $u_1(x, y)$ este soluția primei probleme de tip *Dirichlet*, deci sînt satisfăcute și celelalte condiții (1). Avem

$$f_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n)\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

$$f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi a}{b}} + B_n e^{-\frac{n\pi a}{b}}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

de unde

$$\left.\begin{aligned} A_n + B_n &= \frac{2}{b}\int_0^b f_0(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau d\tau \\ A_n e^{\frac{n\pi a}{b}} + B_n e^{\frac{n\pi a}{b}} &= \frac{2}{b}\int_0^b f_1(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau d\tau \end{aligned}\right\}$$

Rezolvînd acest sistem în necuscutele A_n și B_n găsim

$$A_n = \frac{1}{b\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi a}{b}}\left[e^{\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b f_0(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau d\tau - \int_0^b f_1(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau d\tau\right],$$

$$B_n = \frac{1}{b\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi a}{b}}\left[\int_0^b f_1(\tau)\sin\frac{\tau\pi}{b}\tau d\tau - e^{\frac{n\pi a}{b}}\int_a^b f_0(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau d\tau\right].$$

Rezultă

$$u_1(x, y) = \frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{b}y}{\mathrm{sh}\,\frac{n\pi a}{b}}\left[\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{b}x\int_0^b f_1(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau d\tau - \right.$$

$$\left. - \mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{b}(x-a)\int_0^b f_0(\tau)\sin\frac{n\pi}{b}\tau d\tau\right]. \tag{6}$$

Analog pentru ecuația $\Delta u_2 = 0$ găsim soluția care satisface condițiile (2):

$$u_2(x, y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{a}x}{\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{a}b}\left[\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{a}y\int_b^a g_1(\tau)\sin\frac{n\pi}{a}\tau d\tau + \right.$$

$$\left. + \mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{a}(b-y)\int_0^a g_0(\tau)\sin\frac{n\pi}{a}\tau d\tau\right]. \tag{7}$$

VII.16. Să se rezolve problema lui Dirichlet pentru un cerc de rază dată R cu centrul în originea axelor de coordonate, știind că pe frontieră

$$u|_{\Sigma} = a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6.$$

R. Trecînd la coordonate polare, avem

$$\Delta u = \rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0. \tag{1}$$

$$u|_{\Sigma} = a_1R^2\cos^2\theta + a_2R^2\sin 2\theta + a_3R^2\sin^2\theta + a_4R\cos\theta + a_5R\sin\theta + a_3. \tag{2}$$

Soluția problemei lui Dirichlet fiind unică, căutăm pentru ecuația (1) o soluție de forma

$$u(\rho\cdot\theta) = S(\rho)\cdot T(\theta). \tag{3}$$

Înlocuind funcția (3) în ecuația (1), obținem ecuațiile

$$\rho^2S''(\rho) + \rho S'(\rho) - \lambda S(\rho) = 0, \tag{4}$$

$$T''(\theta) + \lambda T(\theta) = 0, \quad \lambda = \text{const} \tag{5}$$

Pentru a avea soluții nesingulare și ținînd seama de faptul că o funcție armonică uniformă, trebuie să avem

$$S(\theta) = \text{finit}, \ 0 \leqslant \rho < R, \tag{6}$$

$$T(\theta) = T(\theta + 2\pi), \quad -\infty \leqslant \theta \leqslant +\infty.$$

Fie $\lambda < 0$. În acest caz soluția ecuației (5) este

$$T(\theta) = C_1e^{\sqrt{-\lambda}\theta} + C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}, \quad (C_1, C_2 = \text{const}),$$

soluție care nu verifică a doua condiție (6)

Dacă $\lambda = 0$, avem

$$T(\theta) = C_1\theta + C_2, \ (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Singura posibilitate în acest caz este cu $T(\theta) = C_2$.

Pentru $\lambda > 0$ avem pentru ecuația (5) soluția

$$T(\theta) = C_1\cos\sqrt{\lambda}\theta + C_2\sin\sqrt{\lambda}\theta.$$

Din condiția a doua din (6) rezultă

$$\sqrt{\lambda}\theta = \sqrt{\lambda}(\theta + 2\pi) + 2n\pi,$$

deci

$$\lambda = n^2, \ (n = 1, 2, \ldots).$$

și

$$T_n(\theta) = A_n\cos n(\theta + B_n\sin n\theta, \ (A_nB_n = \text{const}), \tag{7}$$

cu $n = 0, 1, 2, \ldots$, deoarece $T(\theta) = C_2$ se cuprinde în (7).

Pentru $\lambda = n^2$ ecuaţia (4) se scrie

$$\rho^2 S''(\rho) + \rho S'(\rho) - n^2 S(\rho) = 0.$$

şi are soluţia

$$S(\rho) = C_1 \rho^n + C_2 \rho^{-n}.$$

Din condiţia $S(\theta) =$ finit rezultă $C_2 = 0$, deci

$$S_n(\rho) = C_n \rho^n, \ (C_n = \text{const}), \ n = 1, 2, \ldots$$

Pentru $n = 0$ ecuaţia devine

$$\rho^2 S''(\rho) + \rho S'(\rho) = 0$$

şi are soluţia

$$S(\rho) = K_1 \ln \rho + K_2, \ (K_1, K_2 = \text{const}).$$

Din condiţia $S(\theta) =$ finit, rezultă $K_1 = 0$, deci soluţia ecuaţiei (4) este

$$S_n(\rho) = C_n \rho^n, \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Ecuaţiile (4) şi (5) admit cte un şir infinit de soluţii de forma (7), respectiv (8) Fie

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Pe (Σ) avem

$$u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta).$$

unde

$$f(\theta) = a_1 R^2 \cos^2 \theta + a_2 R^2 \sin 2\theta + a_3 R^2 \sin^2 \theta + a_4 R \cos \theta + a_5 R \sin \theta + a_6.$$

Identificînd obţinem

$$A_0 = a_6 + a_1 \frac{R^2}{2} + a_3 \frac{R^2}{2}, \qquad A_2 = \frac{a_1}{2} - \frac{a_3}{2},$$

$$A_1 = a_4 \qquad B_2 = a_2,$$

$$B_1 = a_5, \qquad A_n = B_n = 0 \text{ pentru } n > 2.$$

Rezultă

$$u(\rho, \theta) = a_6 + \frac{R^2}{2}(a_1 + a_3) + \rho[a_4 \cos \theta + a_5 \sin \theta] + \rho^2 \left[\left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_3}{2} \right) \cos 2\theta + a_2 \sin 2\theta \right]$$

şi

$$u(x, y) = a_6 + \frac{R^2}{2}(a_1 + a_3) + a_4 x + a_5 y + \frac{a_1 - a_3}{2}(x^2 - y^2) + 2a_2 xy.$$

VII.17. Să se rezolve problema lui Dirichlet pentru domeniul din fig. VII.17 dacă pe frontiera domeniului avem

$$u|_{\theta=0} = 0, \quad u|_{\theta=\alpha} = C, \quad (C = \text{const})$$

$$u\Big|_{r=r_1} = \frac{C\theta}{\alpha}, \quad u\Big|_{r=r_2} = \frac{C\theta}{\alpha}.$$

R. Avem de determinat soluția ecuației

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (1)$$

care să satisfacă condițiile date.

Soluția ecuației o căutăm ca suma următoarei serii:

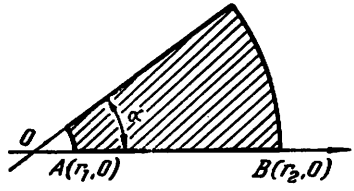


Fig. VII.17

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) \sin\frac{k\pi}{\alpha}\theta,$$

unde

$$u_k = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} u \sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}\, d\theta.$$

Înmulțind (1) cu $\frac{2}{\alpha}\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}\,d\theta$ și integrînd de la 0 la α, obținem

$$\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\sin\frac{k\pi}{\alpha}\theta d\theta + \frac{2}{\alpha r^2}\int_0^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\sin\frac{k\pi}{\alpha}\theta\, d\theta = 0$$

sau

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_k}{dr}\right) + \frac{2}{\alpha r^2}\int_0^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\sin\frac{k\pi}{\alpha}\theta\, d\theta = 0, \qquad (2)$$

unde

$$\int_0^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\sin\frac{k\pi}{\alpha}\theta d\theta = \sin\frac{k\pi}{\alpha}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big|_0^{\alpha} - \frac{k\pi}{\alpha}\int_0^{\alpha}\cos\frac{k\pi}{\alpha}\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}d\theta =$$

$$= -\frac{k\pi}{\alpha}\left[u\cos\frac{k\pi}{\alpha}\theta\right]_0^{\alpha} - \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2 u_k.$$

Ţinînd seama de condiţiile date (2) devine

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_k}{dr}\right)-\left(\frac{k\pi}{\alpha r}\right)^2 u_k=(-1)^k\frac{2k\pi}{\alpha^2 r^2}C \tag{3}$$

şi condiţiile pe frontieră

$$u_k\Big|_{r=r_1}=\frac{2C}{\alpha^2}\int_0^\alpha \theta\sin\frac{k\pi}{\alpha}\theta d\theta=u\Big|_{r=r_2}=(-1)^{k-1}\frac{2C}{k\pi}. \tag{4}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (3) este

$$u_k=A_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}}+B_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}}+(-1)^{k-1}\frac{2C}{k\pi}.$$

Condiţiile (4) conduc la sistemul liniar şi omogen în A_k şi B_k.

$$\left.\begin{aligned} A_k r_1^{\frac{k\pi}{\alpha}}+B_k r_1^{-\frac{k\pi}{\alpha}}&=0\\ A_k r_2^{\frac{k\pi}{\alpha}}+B_k r_2^{-\frac{k\pi}{\alpha}}&=0\end{aligned}\right\}$$

care admite numai soluţia $A_k=B_k=0$.

Rezultă

$$u_k=-(1)^{k-1}\frac{2C}{k\pi}$$

iar soluţia problemei este

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}=\frac{2C}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin\frac{k\pi}{\alpha}}{k}=\frac{C\theta}{\alpha}$$

VII.18. Să se rezolve ecuaţia $\Delta\mu=k$, ($k=\text{const}$), în dreptunghiul $0\leqslant x\leqslant a$, $-\frac{b}{2}\leqslant y\leqslant\frac{b}{2}$, ştiind că pe frontiera acestui domeniu u este nul.

R. Vom determina soluţia ecuaţiei lui Poisson

$$\Delta u=k$$

ca fiind o sumă de două funcţii

$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$$

astfel ca să avem

$$\Delta u_1 = k \tag{1}$$

cu condițiile

$$u_1(0, y) = 0, \; u_2(a, y) = 0 \tag{2}$$

și

$$\Delta u_2 = 0 \tag{3}$$

cu

$$u_2(0, y) = 0, \; u_2(a, y) = 0.$$

$$u_2\left(x, \frac{b}{2}\right) = -u_1\left(x, \frac{b}{2}\right), \quad u_2\left(x, -\frac{b}{2}\right) = -u_1\left(x, -\frac{b}{2}\right). \tag{4}$$

Fie u_1 de forma

$$u_1 = Ax^2 + Bx + C, \qquad (A, B, C = \text{const}).$$

Punînd condiția ca această funcție să verifice ecuația (1) și condițiile (2), obținem

$$A = \frac{k}{2}, \qquad B = -\frac{k}{2}a, \qquad C = 0,$$

deci

$$u_1 = \frac{k}{2}x(x - a), \tag{5}$$

Soluția ecuației (3) care satisface primele două condiții (4) este

$$u_{2,n}(x, y) = \sin\frac{n\pi}{a}x\left[A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\right], \qquad \left(\begin{matrix} k = 1, 2, \ldots \\ A_n B_n = \text{const.} \end{matrix}\right)$$

Ultimele condiții din (4) ne dau egalitățile

$$\sin\frac{n\pi}{a}x\left[A_n e^{\frac{n\pi b}{2a}} + B_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}}\right] = \frac{k}{2}x(a - x),$$

$$\sin\frac{\pi n}{a}x\left[A_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}} + B_n e^{\frac{n\pi b}{2a}}\right] = \frac{k}{2}x(a - x).$$

De aici rezultă $A_n = B_n$ și deci

$$u_{2,n}(x, y) = 2A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y,$$

iar

$$u_2(x, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y.$$

Pentru $y = \frac{b}{2}$ obţinem dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $\frac{k}{2} x(a - x)$ şi anume

$$\frac{k}{2} x(a - x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} \sin \frac{n\pi}{a} x.$$

Coeficienţii acestei serii sînt

$$A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a} = \frac{k}{2a} \int_0^a \xi(a - \xi) \sin \frac{n\pi}{a} \xi d\xi = \frac{ka^2}{(n\pi)^3} [1 - (-1)^n].$$

De aici obţinem

$$A_{2m+1} = \frac{2\, ka^2}{(2m + 1)^3 \pi^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2m+1)\pi b}{2a}}, m = 0, 1, 2, \ldots$$

deci

$$u_2(x, y) = \frac{4ka^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3 \pi^3} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \sin \frac{(2m + 1)\pi}{a} x \operatorname{ch} \frac{(2m + 1)\pi}{a} y.$$

Soluţia problemei este

$$u(x, y) = \frac{k}{2} x(x-a) +$$

$$+ \frac{4ka^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3 \pi^3 \operatorname{ch} \frac{(2m+1)\pi b}{2a}} \cdot \sin \frac{(2m + 1)\pi}{a} x \cdot \operatorname{ch} \frac{(2m + 1)\pi}{a} y.$$

VII.19. Să se rezolve problema Dirichlet pentru sferă ştiind că pe sferă u este funcţie numai de z.

R. Vom trece în coordonate sferice, soluţia fiind funcţie de r şi θ. Avem de determinat deci soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] = 0 \qquad (1)$$

care satisface condiția

$$u(r, \theta)\Big|_{r=R} = f(R\cos\theta). \tag{2}$$

Căutăm o soluție de forma

$$u(r, \theta) = S(r)\, T(\theta). \tag{3}$$

Înlocuind funcția (3) în ecuația (1), găsim

$$T\frac{d}{dr}[r^2S'] + S\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}[\sin\theta T'] = 0$$

sau

$$\frac{1}{S}\frac{d}{dr}[r^2 S'] = \frac{-1}{T\sin\theta}\frac{d}{d\theta}[\sin\theta\cdot T'] = \lambda, \ (\lambda = \text{const}).$$

Obținem următoarele ecuații:

$$\frac{d}{dr}[r^2S'] - \lambda S = 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}[\sin\theta\cdot T'] + \lambda T(\theta) = 0. \tag{5}$$

Coeficienții ecuației (4) sînt $1, \frac{2}{r}, \frac{\lambda}{r^2}$, deci $r = 0$ atrage după sine singularitatea soluției. Pentru a avea o soluție nesingulară, punem condiția ca

$$S(0) = \text{finit}.$$

Coeficienții ecuației (5) sînt $1, \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \lambda$. Pentru a avea o soluție nesingulară atașăm condițiile

$$T(0) = \text{finit}, \quad T(\pi) = \text{finit}.$$

Integrăm ecuația (5). Făcînd schimbarea de variabilă $\cos\theta = t$, obținem ecuația

$$\frac{d}{dt}\left[(1 - t^2)\frac{dT}{dt}\right] + \lambda T = 0$$

și condițiile

$$T(1) = \text{finit}, \quad T(-1) = \text{finit}.$$

Soluția ecuației care satisface aceste condiții este

$$T_n(t) = P_n(t) \text{ cu } \lambda = n(n+1), \ t = \cos\theta,$$

$P_n(t)$ fiind polinoame Legendre, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ecuația (5) admite un șir infinit de soluții nesingulare care satisfac condițiile date.

Ecuația (4) este o ecuație de tip Euler

$$r^2 S'' + 2rS' - n(n+1) S = 0$$

și are soluția

$$S(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-(1+n)} \qquad \begin{pmatrix} C_1,\ C_2 = \text{const} \\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \end{pmatrix}$$

Aceasta soluție nu este finită pentru $r = 0$, deci luăm $C_2 = 0$. Obținem

$$S_n(r) = C_n r^n, \qquad (C_n = \text{const}),$$

deci ecuația (4) admite un șir infinit de soluții nesingulare.

Notăm

$$u_n(r, \theta) = C_n r^n P_n(\cos \theta), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Fie $u(r, \theta)$ suma seriei

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos \theta)$$

și $u(r, \theta)$ este soluție a problemei date, deci vom determina C_n din condiția ca $u(r, \theta) = f(R \cos \theta)$.

Avem

$$u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n P_n(\cos \theta) = f(R \cos \theta).$$

Utilizînd proprietatea de ortogonalitate a polinoamelor Legendre

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\, P_m(t)\, dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n},$$

obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n \int_{-1}^{1} P_n(t)\, P_m(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n} = C_m R^n \frac{2}{2m+1} = \int_{-1}^{1} f_1(t)\, P_m(t) dt.$$

unde

$$f_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n P_n(t) = f(Rt),$$

Rezultă

$$C_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_{-1}^{1} f_1(t)\, P_n(t)\, dt,$$

deci soluția problemei Dirichlet este

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2R^n} \cdot r^n \cdot P_n(\cos \theta) \cdot \int_{-1}^{1} f_1(t)\, P_n(t)\, dt.$$

Capitolul VIII

TEORIA PROBABILITĂŢILOR

Definiţie. *Se numeşte algebră Boole o mulţime nevidă $\mathcal{A}$ înzestrată cu trei operaţii* $\cup$, $\cap$, $\complement$, *care verifică axiomele*:

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$, (asociativitate),
2. $(A \cap B) \cup A = A$, $A \cap (A \cup B) = A$, (absorbţie),
3. $A \cap \complement A) \cup B = B$, $(A \cup \complement A) \cap B = B$ (complementaritate) *pentru orice* A, B, $C \in \mathcal{A}$.

Definiţie. *Un element* $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$ *se numeşte atom dacă pentru orice* $B \in \mathcal{A}$ *incluziunea* $B \subset A$ *implică* $B = \emptyset$ sau $B = A$.

Fie Ω o mulţime oarecare formată din elemente ω şi să notăm prin $\mathcal{P}(\Omega)$ mulţimea tuturor părţilor mulţimii Ω.

Definiţie. *Se numeşte corp de părţi o familie nevidă* $\mathcal{K} \subset P(\Omega)$ *care posedă următoarele proprietăţi*:

1. $A \in \mathcal{K}$, implică $\complement A \in \mathcal{K}$,
2. A, $B \in \mathcal{K}$, implică $A \cup B \in \mathcal{K}$.

Se observă că mulţimile $\omega \in \mathcal{K}$, formate din cîte un singur element sînt atomi ai algebrei Boole $\mathcal{K}$. În general aceste elemente nu epuizează mulţimea atomilor lui $\mathcal{K}$.

Definiţie. *Fie A un eveniment pentru realizarea căruia dintr-un număr total de N cazuri posibile se prezintă n cazuri favorabile. Probabilitatea de realizare a evenimentului A este definită ca raportul dintre numărul cazurilor favorabile şi numărul cazurilor posibile, presupuse toate egal posibile.*

Aceasta este *definiţia clasică* a probabilităţii care poate fi folosită în unele probleme.

Definiţia axiomatică dată de A. N. Kolmogorov a noţiunii de probabilitate :

Definiţie. *Se numeşte cîmp (cîmp borelian)* de evenimente, o mulţime Ω înzestrată cu un corp* (corp borelian) *de evenimente $\mathcal{K}$. Fie $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ un cîmp de evenimente.*

Definiţie. *Se numeşte probabilitate pe $\mathcal{K}$ o aplicaţie $P : \mathcal{K} \to R$ cu următoarele proprietăţi :*

1) $P(A) \geqslant 0$ *pentru orice* $A \in \mathcal{K}$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ *pentru orice evenimente* $A_1, A_2 \in \mathcal{K}$ *cu* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Definiţie. *Se numeşte cîmp de probabilitate tripletul $\{\Omega, \mathcal{K}, P\}$ unde Ω este mulţimea evenimentelor elementare, $\mathcal{K}$ un corp de părţi generat de o familie de părţi ale lui Ω, iar P o probabilitate pe $\mathcal{K}$.*

Definiţie. *Se numeşte cîmp borelian de probabilitate un cîmp borelian de evenimente $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ înzestrat cu o probabilitate P complet aditivă* ($P(A) \geqslant 0$, or $A \in \mathcal{K}$, $P(\Omega) = 1$; $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{K}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j \in I$, I fiind o mulţime cel mult numărabilă de indici).

Dacă Ω conţine un număr finit de evenimente $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, atunci orice eveniment $A \in \mathcal{K}$, $A \neq \emptyset$ este reuniunea unui număr finit de evenimente elementare

$$A = \{\omega_{i1}\} \cup \{\omega_{i2}\} \cup \cdots \cup \{\omega_{ik}\}$$

şi

$$P(A) = P(\{\omega_{i1}\}) + \cdots + P(\{\omega_{ik}\}).$$

Probabilitatea geometrică. Fie $\mathfrak{M}$ o familie de figuri geometrice şi $\mathfrak{N}$ o submulţime de figuri a lui $\mathfrak{M}$.

Probabilitatea submulţimii $\mathfrak{N}$ este egală cu raportul dintre măsura submulţimii $\mathfrak{N}$ de figuri a familiei de figuri $\mathfrak{M}$ şi măsura întregii familii de figuri $\mathfrak{M}$. Dacă D este acea submulţime a domeniului D_0 ale cărei puncte $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ generează submulţimea de figuri $\mathfrak{N}$ a familiei de figuri considerate, avem

$$P(\mathfrak{N}) = \frac{\mu(\mathfrak{N})}{\mu(\mathfrak{M})} = \frac{\nu(D)}{\nu(D_0)} = \frac{\int_D \cdots \int \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_q}{\int_{D_0} \cdots \int \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_q}$$

expresia $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_q$ se numeşte *măsură elementară* a familiei.

---

* În limbajul folosit în teoria măsurii, un cîmp borelian de evenimente este un spaţiu măsurabil care conţine şi spaţiul total.

Definiție. *Se numește probabilitate a evenimentului B condiționată de evenimentul A raportul*

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Fie $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{K}$ o familie cel mult numărabilă de evenimente incompatibile două cîte două cu $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ și $P(A_i) \neq 0$, $i \in I$. Atunci

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i) P(A/A_i)$$

și

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i) P(A/A_i) = \sum_{i \in I} P(A \cap A_i) = P(A \cap \bigcup_{i \in I} A_i).$$

Aceasta este *formula probabilității totale.*

Formula lui Bayes. Fie $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{K}$ o familie cel mult numărabilă de evenimente incompatibile două cîte două cu $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ și $P(A_i) \neq 0$. Atunci

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i) P(A/A_i)}{\sum_{i \in I} P(A_i) P(A/A_i)}, \quad i \in I.$$

Definiție. *Evenimentele A_1, $A_2 \in \mathcal{K}$ sînt independente dacă*

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2).$$

Evenimentele $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{K}$ *sînt independente în totalitatea lor* sau pe scurt, *independente*, dacă pentru orice $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n$ avem

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_s}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_s}).$$

Evenimentele $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{K}$ sînt *independente k cîte k*, $k \leq n$, dacă evenimentele din orice familie de k evenimente sînt independente.

Definiție. *Se numește variabilă aleatoare definită pe un cîmp borelian de evenimente $\{\Omega, \mathcal{K}\}$ o aplicație $\xi : \Omega \to R$ cu proprietatea că $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{K}$ pentru orice $A \in \mathcal{B}$.*

Se numește variabilă aleatoarea simplă o variabilă aleatoare care ia un număr finit de valori finite.

Definiție. *Se numește funcție de repartiție a variabilei aleatoare ξ funcția $F : R \to R$ definită de relația*

$$F(x) = P(A_x), \quad x \in R,$$

unde $A_x = \{\omega \mid \xi(\omega) < x\}$, *sau pe scurt*

$$F(x) = P(\xi < x).$$

Dacă introducem aplicaţia $P^{(\xi)} : \mathcal{B} \to R$ prin relaţia

$$P^{(\xi)}(A) = P(\xi^{-1}(A))$$

numită funcţia de probabilitate corespunzătoare variabilei aleatoare ξ,

$$F(x) = P^{(\xi)}((-\infty, x)).$$

Proprietăţi :

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;
2. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$, dacă $x_1 < x_2$;
3. $F(x - 0) = F(x)$, pentru orice $x \in R$;
4. $F(-\infty) = 0$;
5. $F(+\infty) = 1$.

Dacă există o funcţie nenegativă $\rho(x)$ care verifică pentru orice x egalitatea

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(u)\mathrm{d}u,$$

atunci $\rho(x)$ se numeşte *densitate de repartiţie* a variabilei aleatoare ξ şi are proprietăţile :

1. $\rho(x) \geqslant 0$,
2. $P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(u)\mathrm{d}u, \quad (x_1 < x_2)$,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u)\mathrm{d}u = 1$.

În mod analog se definesc funcţia de repartiţie şi densitatea de repartiţie pentru distribuţii cu mai multe dimensiuni şi cu aceleaşi proprietăţi.

Compunerea legilor de repartiţie. Fie ξ şi η două variabile aleatoare cu densităţile $f(x)$ şi $g(y)$. Avem

$$r(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z - x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

sau

$$r(z) = \iint\limits_{x+y<z} f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde $r(z)$ este ***densitatea*** variabilei aleatoare $\xi = \xi + \eta$.

Dacă ξ şi η sînt independente pentru funcţiile de repartiţii ale variabilelor $\xi\eta$ şi ξ/η, obţinem

$$P(\xi\eta < z) = \iint\limits_{xy<z} f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$P(\xi/\eta < z) = \iint\limits_{x/y<z} f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

sau notînd cu $s(z)$ şi $p(z)$ densităţile de repartiţie corespunzătoare variabilelor $\xi\eta$ şi ξ/η, avem

$$s(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y)f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{|y|},$$

$$p(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|\,g(y)f(zy)\,\mathrm{d}y.$$

Fie $\{\Omega, \mathcal{X}, P\}$ un cîmp borelian de probabilitate şi $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{X}, P)$, $r \in R$, mulţimea variabilelor aleatoare r-sumabile în raport cu probabilitatea P.

Valori medii şi momente

1. Se numeşte ***valoare medie*** a variabilei aleatoare $\xi \in \mathcal{L}^1$ numărul

$$M(\xi) = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathrm{d}P(\omega).$$

Fie $F(x)$ funcţia de repartiţie a lui ξ şi $\tau : R \to R$ o aplicaţie măsurabilă Borel. Presupunem că $\tau \circ \xi \in \mathcal{L}^1$.

2. Se numeşte ***moment de ordinul*** τ al variabilei aleatoare ξ numărul

$$M_\tau(\xi) = M(\tau \circ \xi) = \int\limits_{\Omega} (\tau \circ \xi)(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega) = \int\limits_{R} \tau(x)\mathrm{d}F(x). \qquad (1)$$

3. Se numeşte *moment (iniţial) de ordinul* p, $p \in N$, al variabilei aleatoare ξ numărul obţinut din (1) pentru $\tau(x) = x^p$

$$\alpha_p(\xi) = M(\xi^p) = M_p(\xi) = \int_\Omega \xi^p(\omega)\mathrm{d}P(\omega) = \int_R x^p \mathrm{d}F(x).$$

4. Se numeşte *moment absolut de ordinul* r, $0 < r \in R$, al variabilei aleatoare ξ numărul

$$\beta_r(\xi) = M(|\xi|^r) = \int_\Omega |\xi(\omega)|^r \mathrm{d}P(\omega) = \int_R |x|^r \mathrm{d}F(x).$$

Pentru o variabilă aleatoare de tip discret care ia valorile $(x_i)_{i \in I}$, $I \subset N^*$, cu probabilităţile $(p_i)_{i \in I}$, avem

$$\alpha_p(\xi) = \sum_{i \in I} x_i^p p_i,$$

$$\beta_r(\xi) = \sum_{i \in I} |x_i|^r p_i.$$

Pentru o variabilă aleatoare de tip continuu ξ cu densitatea f formulele date devin

$$\alpha_p(\xi) = \int_R x^p f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\beta_r(\xi) = \int_R |x|^r f(x)\mathrm{d}x.$$

5. Se numeşte *moment central de ordinul* p, $p \in N^*$, numărul

$$\mu_p(\xi) = \alpha_p(\xi - M(\xi)).$$

6. Se numeşte *dispersie* a variabilei aleatoare $\xi \in \mathcal{L}^2$ numărul

$$\sigma^2 = D^2(\xi) = \mu^2(\xi),$$

iar $\sigma = D(\xi)$ se *numeşte abatere medie pătratică.*

7. Se numesc *asimetrie* şi *exces* numerele

$$\gamma_1(\xi) = \frac{\mu_3(\xi)}{\sqrt{\mu_2^3(\xi)}}; \quad \gamma_2(\xi) = \frac{\mu_4(\xi)}{\mu_2^2(\xi)} - 3.$$

8. Se numeşte *covariantă* a variabilelor aleatoare ξ şi η valoarea medie a produsului abaterilor

$$\lambda_{\xi,\eta} = M[(\xi - M(\xi)) \cdot (\eta - M(\eta))] = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)$$

iar

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{\lambda_{\xi,\eta}}{D(\xi) \cdot D(\eta)}$$

se numeşte *coeficient de corelaţie.*

9. Se numeşte *moment de ordinul* $(p_1, \ldots, p_s)$, $p_1, \ldots, p_s \in N$ al variabilei aleatoare n-dimensionale $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$ expresia

$$\alpha_{p_1 \ldots p_s} = E(\xi_1^{p_1}, \ldots, \xi_s^{p_s}) = \int_\Omega \xi_1^{p_1}(\omega) \ldots \xi_s^{p_s}(\omega)\, dP(\omega) =$$

$$= \int_{R^s} x_1^{p_1} \ldots x_s^{p_s} dF(x_1 \ldots x_s).$$

La fel se pot extinde şi momentele absolute şi cele centrate.

Matricea $\| E(\xi_i \eta_j) \|_{1 \leq i,j \leq n}$ se numeşte *matrice de corelaţie* a variabilelor aleatoare n-dimensionale $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$.

Inegalitatea lui Markov

$$P(\xi \geqslant \lambda M(\xi)) \leqslant \frac{1}{\lambda},$$

ξ fiind o variabilă aleatoare pozitivă de valoare medie finită, $\lambda > 1$.

Inegalitatea lui Cebîşev

$$P(\xi \geqslant a) \leqslant \frac{\beta_2(\xi)}{a^2}, \text{ pentru orice } a > 0.$$

Definiţie. *Se numeşte probabilitatea evenimentului A condiţionată de variabila aleatoare ξ variabila aleatoare $P(A \mid \xi)(\cdot)$ definită astfel:*

$$P(A \mid \xi)(\omega) = \begin{cases} P(A \mid \xi = x_i), \ \omega \in \{\omega \mid \xi(\omega) = x_j\} \text{ şi } P(\{\omega \mid \xi(\omega) = \\ = x_i\}) > 0 \text{ o valoare arbitrară dacă } P(\{\omega \mid \xi(\omega) = \\ = x_i\}) = 0. \end{cases}$$

Avem

$$P(A \cap B) = \int_B P(A \mid \xi)(\omega) dP(\omega).$$

Definiţie. *Se numeşte valoare medie a variabilei aleatoare η condiţionată de variabila aleatoare ξ*

$$M(\eta \mid \xi(\omega) = M(\eta \mid \{\omega \mid \xi(\omega) = x_i\}) = \Sigma y_i P(\{\omega \mid \eta(\omega) = \\ = y_i\} \mid \{\omega \mid \xi(\omega) = x_i\}).$$

Avem prin definiţie pentru *funcţia de repartiţie a lui η condiţionată de $\xi = x$*

$$F(y \mid x) = P(\eta < y \mid \xi = x) = \int_{-\infty}^{y} f(t \mid x) \mathrm{d}t,$$

unde $f(y \mid x)$ este *densitatea condiţionată* a lui η de $\xi = x$.

Definiţie. *Se numeşte funcţie caracteristică a variabilei aleatoare ξ aplicaţia $\varphi_\xi : R \to C$ definită de relaţia*

$$\varphi_\xi(t) = E(\mathrm{e}^{it\xi}) = \int_\Omega \mathrm{e}^{it\xi(\omega)} \mathrm{d}P(\omega) = \int_R \mathrm{e}^{itx} \mathrm{d}F_\xi(x).$$

Dacă variabila aleatoare ξ are densitatea de repartiţie $f(x)$, atunci

$$\varphi(t) = \int_R \mathrm{e}^{itx} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Proprietăţi mai importante:

1. $\varphi(t)$ este uniform continuă şi $\varphi(0) = 1$, $|\varphi(t)| \leqslant 1$.
2. Dacă $\beta_n(\xi) < \infty$ pentru un anumit $n \in N^*$, funcţia caracteristică φ este de n ori derivabilă şi

$$\alpha_k(\xi) = \frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{ik}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

3. Dacă ξ are momente de orice ordin, avem

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \alpha_k(\xi).$$

4. Fie variabila ξ cu repartiţia $F(x)$ şi x_1, x_2, $(x_1 \leqslant x_2)$, două puncte de continuitate pentru $F(x)$; are loc egalitatea

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-itx_1} - \mathrm{e}^{itx_2}}{it} \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Dacă x este punct de continuitate a lui $F(x)$, avem

$$F(x) = \lim_{y\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} \varphi(t)\, dt.$$

5. Dacă $(F_n(x))_{n\in N^*}$ este un şir de funcţii de repartiţie convergent spre funcţia de repartiţie $F(x)$, atunci şirul de funcţii caracteristice $(\varphi_n(t))_{n\in N^*}$ tinde la funcţia caracteristică $\varphi(t)$ corespunzătoare funcţiei $F(x)$.

6. Funcţia caracteristică este o funcţie de tip pozitiv.

Convergenţa şirurilor de variabile aleatoare

Fie $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare definite pe cîmpul de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$ şi ξ o variabilă aleatoare definită de asemenea pe acest cîmp.

1. Şirul de variabile aleatoare converge *în probabilitate* (sau *stochastic*) către ξ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0.$$

2. Şirul de variabile aleatoare converge *aproape sigur* către ξ dacă există o mulţime $E_0 \in K$ cu $P(E_0) = 0$ aşa încît

$$\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$$

pentru orice $\omega \in \Omega - E_0$; deci dacă $(\xi_n(\omega))_{n\in N^*}$ converge simplu către $\xi(\omega)$ cu excepţia unei mulţimi E_0 de probabilitate nulă.

3. Şirul de variabile aleatoare $(\xi_n(\omega))_{n\in N^*}$ converge în *sensul lui Bernoulli* către $\xi(\omega)$ dacă funcţiile de repartiţie $F_n(x)$ converg către $F(x)$ în orice punct $x \in R$ de continuitate a funcţiei $F(x)$.

4. Spunem că şirul converge tare către ξ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$ există $N(\varepsilon, \eta)$ aşa încît

$$P\left(\bigcup_{n\geq N(\varepsilon,\eta)} \{\omega \,|\, |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}\right) < \eta.$$

Teorema lui Leapunov. Fie $(\xi_n(\omega))_{n\in N^*}$ un şir de variabile aleatoare independente; dacă există un număr $\delta > 0$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\delta_{(n)}^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \beta_{2+\delta}(\xi_k - a_k) = 0,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x), \qquad x \in R.$$

Teorema lui Moivre-Laplace Fie $(\xi_n)_{n\in N^*}$ un şir de variabile aleatoare care pot lua fiecare valorile 1 şi 0, respectiv cu probabilităţile p şi $q = 1 - p$. Atunci funcţia de repartiţie $F(x)$ a variabilei aleatoare normate

$$\xi_{(n)} = \frac{\xi^{(n)} - np}{\sqrt{npq}}, \text{ unde } \xi^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

converge pentru $n\to\infty$ la Φ.

Legea logaritmului iterat. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ variabile aleatoare uniform mărginite şi independente, avînd aceeaşi valoare medie $M = E(\xi_n)$ şi aceeaşi dispersie $D^2 = D^2(\xi_n)$. Notăm

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - nM}{D}.$$

Avem

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|n_n|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} \leqslant 1\right) = 1.$$

Repartiţia binomială

Să considerăm un cîmp de probabilitate finit care constă în evenimentele A şi $\complement A$ (evenimentul contrar), în afară de evenimentul total Ω şi evenimentul imposibil $\emptyset$.

Experienţa care de fiecare dată duce la apariţia evenimentului A sau a evenimentului $\complement A$ o vom numi *probă*.

n probe independente dau naştere fiecare la unul din cele două evenimente A şi $\complement A$, cu probabilităţile constante p şi q în fiecare probă ($p + q = 1$).

Presupunem că în cele n probe independente, evenimentul A s-a verificat de α ori, iar evenimentul $\complement A$ de $n - \alpha$ ori. Repartiţia variabilei aleatoare α se numeşte *repartiţie binomială*.

Probabilitatea ca în cele n probe evenimentul A să se verifice de α ori este

$$P_{n,\alpha} = C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha}. \tag{1}$$

Funcţia de repartiţie a repartiţiei binomiale este

$$F(x) = P(\alpha \leqslant x) = \sum_{\alpha=0}^{[x]} P_{n,\alpha},$$

unde am notat cu $[x^\circ]$ cel mai mare întreg conţinut în x.

Repartiţia multinomială

Fie spaţiul euclidian R_m în care luăm baza formată din vectorii

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_m = (0, 0, \ldots, 1).$$

Fie $(\xi_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ o familie de variabile aleatoare vectoriale independente, în care fiecare variabilă ξ_k poate lua ca valori vectorii e_j cu probabilităţile p_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

Funcţia de repartiţie multidimensională a vectorului $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ se numeşte *funcţie de repartiţie multinomială.*

Dacă $k = (k_1, \ldots, k_m)$ cu $k_1 + \cdots + k_m = n$, atunci

$$P(\xi = k) = P_{n,k_1 \ldots k_m} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}.$$

Repartiţia hipergeometrică

Vom ilustra această repartiţie astfel: Să presupunem o urnă care conţine A bile albe şi B bile negre. Din această urnă se fac n extracţii succesive, fără să se pună bila extrasă înapoi în urnă (schema bilei neîntoarse). Obţinem în modul acesta n probe dependente, adică un şir (ξ_k) de variabile aleatoare vectoriale dependente, unde fiecare poate lua valorile $a_{k_1} = (1, 0)$ sau $a_{k_2} = (0, 1)$ cu probabilităţile respective p_{k_1} şi p_{k_2} $(k = 1, \ldots, n;\ p_{k_1} + p_{k_2} = 1)$.

Într-o singură probă variabila vectorială ξ_k poate să apară sau nu, de unde rezultă că vom avea distribuţia

$$\xi_k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_{k_1} & p_{k_2} \end{pmatrix}$$

Probabilitatea ca în n extracţii succesive să scoatem α bile albe şi β bile negre ($\alpha + \beta = n$) este

$$P_n(\alpha) = \frac{C_A^\alpha \, C_B^\beta}{C_{A+B}^{\alpha+\beta}}$$

Repartiţia Poisson. Se numesc funcţii de repartiţie Poisson cu parametrul $\lambda > 0$ funcţiile de repartiţii

$$P(x\,;\,\lambda) = \sum_{k \in N} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \theta(x - k),$$

θ fiind funcţia lui Heaviside*.

Densitatea de repartiţie a funcţiei $P(x\,;\,\lambda)$ este egală cu

$$\pi(x\,;\,\lambda) = \sum_{k \in N} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \delta(x - k)$$

unde $\delta(x)$ este funcţia lui Dirac.**

Dacă variabila aleatoare ξ are repartiţia Poisson cu parametrul $\lambda > 0$, atunci se vede că valorile ei sînt 0, 1, ... şi că

$$P_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

---

* $\theta(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0, \\ 1, \text{ dacă } x \geqslant 0. \end{cases}$

** $\delta(x - 0) = 0, \quad x \neq a, \quad \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(x - a)\,dx = 1, \quad \varepsilon > 0, \quad \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} h(x)\,\delta(x - a)\,dx = h(a).$

Repartiția normală $N(m, \sigma^2)$. Se numește funcție de repartiție normală și se notează cu $\Phi(x; m, \sigma^2)$ funcția de repartiție definită prin densitatea de repartiție

$$f(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

m și $\sigma^2 > 0$ fiind constante, numite parametrii repartiției.

Funcția de repartiție normală este egală cu

$$\Phi(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Repartiția χ^2. Spunem că variabila aleatoare ξ are funcția de repartiție χ^2 cu n grade de libertate dacă funcția de repartiție a variabilei aleatoare ξ este nulă pentru $x \leqslant 0$ iar pentru $x > 0$ este

$$K_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt.$$

Dacă $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sînt variabile aleatoare normale independente $N(0, 1)$, atunci variabila aleatoare

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

are densitatea de repartiție egală cu

$$k_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Repartiția gamma. Se numește funcție de repartiție gamma funcția de repartiție a cărei densitate de repartiție este egală cu

$$\Gamma_{\alpha,\nu}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & \text{dacă } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Repartiţia beta. Se numeşte funcţie de repartiţie beta cu (m, n) grade de libertate funcţia de repartiţie a cărei densitate de repartiţie este egală cu

$$\beta_{m,n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1}, & \text{dacă } x \in (0, 1), \\ 0, & \text{dacă } x \notin (0, 1). \end{cases}$$

Repartiţia normală n-dimensională $N(m, \Lambda^{-1})$. Fie ξ o variabilă aleatoare vectorială n-dimensională $\left\| \begin{matrix} \xi_i \\ \vdots \\ \xi_n \end{matrix} \right\|$, unde ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sînt variabile aleatoare cu $E(\xi_i) = m_i$ şi $D(\xi_i) = \sigma_i$.

Se numeşte funcţie de repartiţie n-dimensională normală funcţia de repartiţie definită prin densitatea de repartiţie

$$f(x) = \sqrt{\frac{\det \Lambda^{-1}}{(2\pi)^n}}\, e^{-\frac{1}{2}\|x-m\|'\Lambda\|x-m\|}$$

unde

$$x = \left\| \begin{matrix} x_i \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|, \quad m = \left\| \begin{matrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{matrix} \right\| \quad \text{şi} \quad \Delta = \left\| \begin{matrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

cu $\det \Delta > 0$.

PROBLEME

VIII.1. Fie evenimentele A şi B şi trei numere reale p_1, p_2, p_{12}. Să se arate că pentru a avea

$$P(A) = p_1, \; P(B) = p_2, \; P(AB) = p_{12}$$

este necesar şi suficient să fie verificate următoarele relaţii :

$$1 - p_1 - p_2 + p_{12} \geqslant 0, \tag{1}$$

$$p_1 - p_{12} \geqslant 0, \tag{2}$$

$$p_2 - p_{12} \geqslant 0, \tag{3}$$

$$p_{12} \geqslant 0, \tag{4}$$

R. Se observă că membrii întîi ai celor patru relații sînt probabilitățile lui $\overline{AB}$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ și AB, deci nu pot fi negative.

Să demonstrăm suficiența. Din cele patru condiții rezultă

$$0 \leqslant p_{12} \leqslant p_1 \leqslant p_1 + p_2 - p_{12} \leqslant 1.$$

și de asemenea

$$0 \leqslant p_{12} \leqslant p_2 \leqslant p_1 + p_2 - p_{12} \leqslant 1.$$

Numerele p_1, p_2, p_{12} sînt deci nenegative și cel mult egale cu 1. Fie intervalul $I = (0, 1)$ și presupunem că un punct P ales la întîmplare în acest interval este uniform repartizat, adică probabilitatea pentru ca el să cadă într-un interval parțial oarecare este egală cu lungimea acestui interval parțial. Dacă A este evenimentul „punctul cade în intervalul $0 < x < p_1$" și B evenimentul „punctul cade în intervalul $p_1 - p_{12} < x < p_1 + p_2 - p_{12}$", este clar că

$$P(A) = p_1, \quad P(B) = p_2, \quad P(AB) = p_{12}.$$

VIII.2. Fie Ω o mulțime numărabilă ale cărei elemente sînt ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$

Fie $\mathscr{A}$ mulțimea părților lui Ω. Definim probabilitatea P prin

$$P(\{\omega_n\}) = p_n, \text{ unde } p_n \geqslant p_{n+1} > 0, \ (n = 1, 2, \ldots) \text{ și } \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

1° Să se arate că mulțimea numerelor x pentru care există cel puțin un $A \in \mathscr{A}$ cu $P(A) = x$ este completă.

2°. Să se arate că în condiția 1°, $P(A)$ ia toate valorile din $[0, 1]$ dacă și numai dacă

$$p_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3°. În condiția 1° să se arate că numerelor $x_1, \ldots, x_r$ cu

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = 1, \ x_i \geqslant 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

le corespunde un sistem complet de evenimente și unul singur A_1, $A_2, \ldots, A_r$ cu $P(A_i) = x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$ dacă sînt satisfăcute condițiile

$$p_n \leqslant \frac{1}{r} \sum_{k=n}^{\infty} p_k, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

R. Spunem că un număr x este reprezentabil dacă există un eveniment $A \in \mathscr{A}$ cu $P(A) = x$. Fie $x_n (n = 1, 2, \ldots)$ numere reprezentabile și fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$. Să arătăm că x este de asemenea reprezentabil: din șirul $\{x_n\}$ se poate extrage un subșir infinit $\{x_{n_k}\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ astfel ca în reprezentarea tuturor x_{n_k} termenul p_{i_1} este foarte

mare. Din acest subșir se poate extrage un alt subșir infinit de numere, în reprezentarea căruia p_{i_2} este al doilea termen foarte mare. Obținem procedînd astfel un șir $(p_{i_s} = 1, 2, \ldots)$ pentru care $\sum_{s=1}^{\infty} p_{i_s} = x$.

Mulțimea valorilor $P(A)$ este deci închisă.

Pe de altă parte x este un număr reprezentabil printr-o sumă finită de p_i. Fie

$$x = \sum_{j=1}^{N} p_{ij},$$

atunci

$$x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} + p_n\right).$$

Dacă $x = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$, putem scrie

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}.$$

Mulțimea de valori $P(A)$ este deci perfectă.

3° Condiția necesară este imediată. Să demonstrăm suficiența, Fie $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant x_r$, cu $x_1 \geqslant 1/r$ și $p_1 \leqslant 1/r$. Deci p_1 poate fi utilizat pentru reprezentarea lui x_1. Fie $x_1' = \max(x_1 - p_1, x_2)$, de unde $x_1 \geqslant \frac{}{r}(1 - p_1)$. Dar $p_2 \leqslant \frac{1}{r}(1 - p_1)$, deci p_2 poate fi utilizat în reprezentarea lui x_1', deci a unui x_j. Continuînd astfel se vede că toți p_n pot fi utilizați pentru reprezentarea unui x oarecare. Deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{j=1}^{r} x_j = 1,$$

am obținut o descompunere a serici $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ în r serii parțiale disjuncte astfel că suma din a j— a serie este x_j. Dacă A_j este compus din elementele ω_n ale căror probabilități p_n intervin în x_j, mulțimea A_j are proprietatea cerută.

2° este caz particular al lui 3° pentru $r = 2$.

VIII.3. O algebră de probabilitate (după Kolmogorov) $\{\Omega, \mathscr{K}, P\}$ se spune că este neatomică dacă oricare ar fi evenimentul $A \in \mathscr{A}$ cu $P(A) > 0$, există un eveniment $B \subseteq A$ astfel că $0 < P(B) < P(A)$. Să se arate că pentru o algebră de probabilitate neatomică, mulțimea valorilor lui $P(A)(A \in \mathscr{K})$ este segmentul $[0, 1]$.

R. Să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate obține o partiție a lui Ω în mulțimi $A_j (A_j \in \mathscr{K};\ j = 1, \ldots, m)$ cu $P(A_j) \leqslant \varepsilon$ și anume: orice parte $A \in \mathscr{A}$ din Ω cu $P(A) > 0$ conține o mulțime B cu $0 < P(B) \leqslant \varepsilon$. Dacă $P(A) \leqslant \varepsilon$, se ia $A = B$; dacă $P(A) > \varepsilon$,

se poate găsi (deoarece P este neatomic) un $B \subseteq A$ cu $B \in \mathscr{K}$ şi $0 \lhd P(B) < P(A)$; unul din $P(B)$ şi $P(A-B)$ este cel mult egal cu $\frac{P(A)}{2}$. Dacă $\frac{P(A)}{2} \leqslant \varepsilon$, demonstraţia este terminată iar dacă $\frac{P(A)}{2} > \varepsilon$ o continuăm. Cum pentru un întreg r destul de mare avem $\frac{P(A)}{2^r} \leqslant \varepsilon$, obţinem, într-un număr finit de etape un B cu $B \subseteq A$, $B \in \mathscr{A}$ şi $0 < P(B) \leqslant \varepsilon$. Se ia

$$\mu_\varepsilon(A) = \sup_{B \subseteq A,\, P(B) \leqslant \varepsilon} P(B), \text{ pentru } A \in \mathscr{K},$$

şi $\mu_\varepsilon(A)$ este pozitiv pentru $P(A) > 0$. Alegem apoi un $A_1 \in \mathscr{K}$ cu $0 < P(A_1) \leqslant \varepsilon$, apoi un $A_2 \subseteq \overline{A}_1$ cu

$$\varepsilon \geqslant P(A_2) \geqslant \frac{1}{2} \mu_\varepsilon(\overline{A}_1).$$

apoi un $A_3 \subseteq \overline{A_1 + A_2}$ cu $\varepsilon \geqslant P(A_3) \geqslant \frac{1}{2} \mu_\varepsilon(\overline{A_1 + A_2})$. În general, $A_1, A_2, \ldots A_n$ fiind deja aleşi, alegem un A_{n+1} astfel ca

$$A_{n+1} \subseteq \overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}$$

cu

$$\varepsilon \geqslant P(A_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2} \mu_\varepsilon(\overline{A_1 + A_2 + \ldots A_n}).$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt disjuncte, deci $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leqslant 1$ şi în consecinţă $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$ şi de asemenea

$$\lim_{n \to \infty} \mu_\varepsilon(\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}) = 0.$$

Dacă luăm $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = B$, cum $\mu_\varepsilon(A)$ este o funcţie monotonă, $\mu_\varepsilon(\overline{B}) = 0$, rezultă deci că $P(\overline{B}) = 0$. Punînd $A_1' = A_1 + \overline{B}$, avem

$$A_1' + \sum_{n=2}^{\infty} A_n = \Omega \text{ şi } 0 < P(A_n) \leqslant \varepsilon, \ (n = 2, 3, \ldots), \ 0 \leqslant P(A_1') \leqslant \varepsilon.$$

Alegem apoi un N suficient de mare pentru ca $\sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) \leqslant \varepsilon$. Mulțimile $A'_1, A_2, \ldots$

$\ldots, A_{N-1}$ și $A'_N = \sum_{n=N}^{\infty} A_n$ au proprietatea cerută.

Fie $0 < x < 1$, atunci putem construi un $A \in \mathscr{K}$ cu $P(A) = x$. Descompunem apoi Ω în N_1 părți disjuncte A_{1j} astfel ca

$$0 \leqslant P(A_{1j}) \leqslant \frac{x}{2}, \ (j = 1, 2, \ldots, N_1).$$

Fie $x_{1,r} = P\left(\sum_{j=1}^{r} A_{1j}\right)$ x aparținînd unuia din intervalele $[x_{1,r}, x_{1,r+1}]$, $(r=1, 2, \ldots$ $\ldots, N_1 - 1)$. Fie $[x_{1,r_1} x_{1,r_1+1}]$ acest interval. Dacă $x = x_{1,r_1}$, construcția noastră este terminată. Dacă $x_{1,r_1} < x < x_{1,r_1+1}$, descompunem A_{1,r_1+1} în mulțimile $A_{2j}(j = 1, 2, \ldots, H)$ astfel ca

$$0 \leqslant P(A_{2j}) \leqslant \frac{x - x_{1,r_1}}{2},$$

Fie

$$x_{2,r} = P\left(\sum_{j=1}^{r_1} A_{1j} + \sum_{j=1}^{r_2} A_{2j},\right), \ (r_2 = 1, 2, \ldots, N_2),$$

x aparținînd unuia din intervalele $[x_{2,r}, x_{2,r+2}]$ și fie $[x_{2,r_2}, x_{2,r_2+1}]$ acest interval. Continuînd astfel obținem mulțimea

$$A = \sum_{j=1}^{r_1} A_{1j} + \sum_{j=1}^{r_2} A_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{r_s} A_{sj} + \ldots$$

cu $P(A) = x$.

VIII.4. În cîmpul de probabilitate (Ω, K, P) se dau evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și sumele

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \ S_2 = \sum_{i,j=1}^{n} P(A_i \cap A_j), \ldots, \ S_n = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Să se exprime în funcție de S_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ probabilitatea:

1° de realizare a cel puțin a unui eveniment A_i;

2° de realizare a exact m evenimente A_i;

3° de realizare a cel puțin m evenimente A_i.

R. 1°. Pentru $n = 2$ avem

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Dacă $n > 2$, fie ω un eveniment elementar. El poate interveni în k evenimente A_i şi fără a diminua generalitatea putem presupune că ω intervine în evenimentele $A_1, A_2, \ldots A_k$, deci ω intervine în S_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, de C_k^i ori în fiecare S_i. Pentru ca ω să intervină în final o singură dată, trebuie să avem

$$\sum_{i=1}^{k} C_k^i \alpha_i = 1 \text{ cu } \alpha_i = (-1)^{i-1}$$

$$\left(\text{acest lucru rezultă din } (1-x)^k = 1 - \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-1)^{i-1} x^i, \text{ făcînd } x = 1\right).$$

Probabilitatea cerută va fi

$$P = S_1 + S_2 + \ldots + (-1)^{i-1} S_i + \ldots + (-1)^{n-1} S_n.$$

Aceasta este formula lui Poincaré.

2°. Notînd cu P_m probabilitatea cerută, pentru $m = 0$, avem $P_0 = 1 - P$.

Dacă $m \neq 0$, notînd cu ω un eveniment elementar arbitrar, conţinut în exact k evenimente $A_1, \ldots, A_k$, $P(\omega)$ intervine în P_m, dacă şi numai dacă $k = m$, iar sumele S_i, $i \lhd m$ nu intervin în P_m.

Avem deci

$$P_m = \alpha_m S_m + \alpha_{m+1} S_{m+1} + \ldots + \alpha_n S_n,$$

unde coeficienţii α_i satisfac relaţiile:

$$\sum_{i=m}^{k} C_k^i \alpha_i = 0, \text{ dacă } k > m,$$

$$\sum_{i=m}^{k} C_k^i \alpha_i = 1, \text{ dacă } k = m.$$

De aici rezultă $\alpha_m = 1$.

Din $(1-x)^{k-m} = \sum_{l=0}^{k-m} (-1)^l C_{k-m}^l x^l$, pentru $x = 1$ şi $l = i - m$ rezultă

$$\sum_{i=m}^{k} (-1)^{i-m} C_{k-m}^{i-m} = 0$$

şi

$$C_k^i \alpha_i = \lambda (-1)^{i-m} \; C_{k-m}^{i-m}, \; \lambda = \text{const.}$$

Luînd $i = m$, obţinem $C_k^m \alpha_m = \lambda$, deci $\lambda = C_k^m$ şi

$$\alpha_i = (-1)^{i-m} C_m^i \text{ (independent de } k).$$

Avem

$$P_m = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} C_i^m S_i.$$

3° Notînd cu P_{1m} probabilitatea cerută avem

$$P_{1m} = \sum_{n=m}^{n} P_i$$

și deoarece

$$P_{1(n+1)} = P_{1m} - P_m$$

se obține prin recurență

$$P_{1m} = \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i-m} C_{i-1}^{m-1} S_i.$$

VIII.5. O urnă conține 50 de bile dintre care 10 sînt negre iar restul albe. Se scot la întîmplare 5 bile. Care este probabilitatea ca între cele cinci bile să fie bile negre.

R. Evenimentele „toate cele cinci bile sînt albe" și „între cele 5 bile cel puțin una este neagră" sînt evenimente complementare. Probabilitatea ca să se scoată cinci bile albe este

$$\frac{C_{40}^5}{C_{50}^5}$$

de unde probabilitatea cerută:

$$1 - \frac{C_{40}^5}{C_{50}^5} = 0{,}68944.$$

VIII.6. Este mai probabil de a obține cel puțin numărul șase în patru aruncări cu zarul sau de a obține cel puțin o dublă șase în 24 de aruncări cu două zaruri?

R. Probabilitatea de a obține fața cu numărul șase într-o aruncare cu zarul este $\frac{5}{6}$. Probabilitatea de a obține cel puțin un șase în patru aruncări este

$$P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}51.$$

Probabilitatea de a obține dubla șase în 24 de aruncări cu două zaruri este $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ din probabilitatea de a obține cel puțin o dublă șase în 24 de aruncări cu două zaruri,

este

$$P_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx = 0{,}49.$$

VIII.7. Un trăgător trage asupra unei ţinte avînd la dispoziţie două puşti A_1 şi A_2. La prima tragere alege la întîmplare o puşcă. Dacă nimereşte ţinta păstrează aceeaşi puşcă pentru tragerea următoare, iar în caz de eşec schimbă puşca. Dacă α şi β sînt probabilităţile de succes pentru fiecare din A_1 şi A_2 şi p_i probabilitatea de succes în tragerea de rang i, $\alpha \neq \beta$, se cere:

1° valoarea lui P_{i+1} în funcţie de p_i;

2° $\lim\limits_{i\to\infty} p_i$.

R. Notăm cu S_i respectiv E_i evenimentele care reprezintă succesul respectiv, eşecul în tragerea de rang i, iar cu A_{i_1}, A_{i_2} evenimentele A_1, respectiv A_2 sînt utilizate în tragerea de rang i.

$$P_i = P(S_i) = P(S_i \cap A_{i_1}) + P(S_i \cap A_{i_2}) =$$
$$= P(A_{i_1})P(S_i/A_{i_1}) + P(A_{i_2})P(S_i/A_{i_2}),$$

de unde

$$P_i = \alpha P(A_{i_1}) + \beta P(A_{i_2}),\ P(A_{i_1}) + P(A_{i_2}) = 1. \tag{1}$$

Rezultă de aici

$$P(A_{i_1}) = \frac{\beta - p_i}{\beta - \alpha},\ P(A_{i_2}) = \frac{p_i - \alpha}{\beta - \alpha} \tag{2}$$

$$P_{i+1} = P(S_{i+1}) = P(S_{i+1} \cap A_{i_1+1}) + P(S_{i+1} \cap A_{i_2+1}) = P(A_{i_1+1})P(S_{i+1}/A_{i_1+1}) +$$
$$+ P(A_{i_2+1})P(S_{i+1}/A_{i_2+1}) = \alpha P(A_{i_1+1}) + \beta P(A_{i_2+1})$$

în care

$$P(A_{i_1+1}) = P(A_{i_1+1}) \cap S_i) + P(A_{i_1+1} \cap E_i).$$

Avînd în vedere regula impusă, evenimentele $\{A_{i_1+1} \cap S_i\}$ şi $\{A_{i_1}, S_i\}$ sînt identice, deci

$$P(A_{i_1+1} \cap S_i) = P(A_{i_1} \cap S_i) = \alpha P(A_{i_1}),$$
$$P(A_{i_1+1} \cap E_i) = P(A_{i_2} \cap E_i) = (1 - \beta)P(A_{i_2})$$

şi

$$P(A_{i_1+1}) = \alpha P(A_{i_1}) + (1 - \beta)P(A_{i_2}),$$
$$P(A_{i_2+1}) = \beta P(A_{i_2}) + (1 - \alpha)\ P(A_{i_1})$$

deci

$$P_{i+1} = \alpha^2 P(A_{i_1}) + (1 - \beta)\alpha P(A_{i_2}) + \beta^2 P(A_{i_2}) + (1 - \alpha)\beta P(A_{i_1}).$$

Ţinînd seama de (2) rezultă

$$P_{i+1} = (\alpha + \beta - 1)\, p_i + (\alpha + \beta - 2\alpha\beta).$$

2°. Prin recurenţă se obţine

$$P_{i+1} = (\alpha + \beta - 1)^i \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}{2 - (\alpha + \beta)} \right) + \frac{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}{2 - (\alpha + \beta)}.$$

Pentru $i \to \infty$ probabilitatea p_i tinde către

$$\frac{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}{2 - (\alpha + \beta)}.$$

VIII.8. O urnă conţine 36 bile albe şi 12 bile negre. O persoană scoate bilele una cîte una pînă cînd obţine 10 bile albe. Să se determine valoarea medie a numărului de bile negre extrase.

R. Sîntem în cazul schemei bilei neîntoarse. Probabilitatea de a scoate 10 bile albe şi k bile negre este

$$p = \frac{C_{36}^{10} \cdot C_{12}^{k}}{C_{48}^{10+k}},$$

Valoarea medie a numărului de bile negre extrase este

$$M = C_{36}^{10} \sum_{k=0}^{12} k \frac{C_{12}^{k}}{C_{48}^{10+k}}.$$

VIII.9. Să se determine probabilitatea ca ultimele două cifre ale cubului unui număr N luat la întîmplare (prin număr luat la întîmplare se înţelege aici un număr $k > 1$, pentru fiecare cifră este una dintre cifrele 0, 1, ..., 9) să fie egale cu 1.

R. Scriem numărul N sub forma

$$N = a + 10b + \ldots$$

unde a, b, ... sînt numere oarecare, care pot lua una dintre valorile 0,1, ..., 9.

Atunci

$$N^3 = a^3 + 30\, a^2 b + \ldots$$

Rezultă deci că asupra ultimelor două cifre ale lui N^3 influenţează numai a şi b. De aceea numărul valorilor posibile este $n = 100$.

Pentru ca ultima cifră a lui N^3 să fie 1, se ia ca valoare favorabilă $a = 1$. Apoi trebuie să fie 1 şi ultima cifră a lui

$$\frac{N^3 - 1}{10},$$

adică este necesar ca produsul $3b$ să se termine cu 1. Aceasta are loc pentru $b = 7$.

În acest mod rezultă o singură valoare favorabilă $a = 1$, $b = 7$, deci probabilitatea cerută este

$$p = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

VIII.10. O urnă conține N bile, dintre care M bile negre și $N - M$ bile albe. Se fac extrageri fără a se repune bilele în urnă (schema bilei neîntoarse).

1° Se fac k extrageri. Care este probabilitatea ca în extracția de rang k să se obțină pentru prima dată o bilă neagră?

2° Se extrag n bile. Care este probabilitatea ca între cele n bile extrase k să fie negre și $n - k$ albe?

R. 1°. Primele $k - 1$ bile pot fi alese cele $N - M$ bile albe în C_{N-M}^{k-1} moduri și se pot ordona în $(k - 1)!$ moduri. Pentru bila neagră care apare în locul k avem M alegeri posibile și celelalte locuri pot fi ocupate în $(N - k)!$ moduri.

Deci probabilitatea cerută este

$$P_k = \frac{1}{N!} \cdot C_{N-M}^{k-1} \cdot (k-1)! \, M \cdot (n-k)!$$

sau

$$P_k = \frac{M}{N-k+1} \prod_{j-1}^{k-1} \left(1 - \frac{M}{N-j+1}\right).$$

Dacă N și M sînt mari în raport cu k și dacă notăm $p = \frac{M}{N}$, $(0 < p < 1)$, obținem pentru P_k valoarea apropiată

$$P_k \approx (1-p)^{k-1} \cdot p = \pi_k.$$

În sfîrșit, dacă N și M tind către infinit astfel ca p să rămînă constant, $P_k \to \pi_k$.

2° Numărul cazurilor posibile este C_N^n, iar numărul cazurilor favorabile $C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}$. Notînd cu P probabilitatea ca dintre cele n bile extrase k bile să fie negre, avem

$$P_k = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

VIII.11. Evenimentul A constă în apariția cel puțin o dată a feței 5, aruncînd un zar de patru ori, și evenimentul B constă în apariția feței 5 cel puțin de două ori, aruncînd de 18 ori cîte două zaruri. Care din cele două evenimente este mai probabil?

R. Probabilitatea ca într-o aruncare cu zarul să nu apară fața 5 este $\frac{5}{6}$, iar ca să nu apară fața 5 aruncînd patru zaruri este

$$P(\complement A) = \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Probabilitatea ca aruncînd un zar de patru ori să apară fața 5 cel puțin o dată este

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Se poate interpreta apariţia feţei 5 a unui zar, ca o urnă cu două stări, una „faţa 5" cu $p = \frac{1}{6}$ şi alta „non faţa 5" cu probabilitatea $q = \frac{5}{6}$. Aruncările sînt independente, deci în loc să aruncăm de două ori cîte 18 zaruri, putem arunca 36 de zaruri o singură dată. După formula urnei, probabilitatea evenimentului $\complement B$ ca în 36 de aruncări să obţinem sau de zero ori faţa 5 sau o dată faţa 5 este

$$P(\complement B) = \left(\frac{5}{6}\right)^{36} + 36 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{35}.$$

Avem

$$\frac{P(\complement B)}{P(\complement A)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{35} \cdot \frac{41}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{4}} < 7\left(\frac{5}{6}\right)^{31} < 1.$$

deci $P(\complement B) < P(\complement A)$. Dar $P(\complement B) = 1 - P(B)$ şi $P(\complement A) = 1 - P(A)$, rezultă că $P(A) < P(B)$.

VIII.12. Din 100 de piese lucrate la un strung, 5 sînt defecte. Se iau la întîmplare 45 de piese.

1° Care este probabilitatea ca să existe între cele 45 de piese o singură piesă defectă?

2° Care este probabilitatea ca să existe cel puţin o piesă defectă?

R. 1° Fie A evenimentul care constă în a avea o singură piesă defectă din 45. Avem

$$P(A) = \frac{C_5^1 C_{95}^{44}}{C_{100}^{45}}.$$

2° Notăm cu B evenimentul ca să avem cel puţin o piesă defectă. Numărul de cazuri favorabile este

$$C_5^1 \cdot C_{95}^{44} + C_5^2 \cdot C_{95}^{43} + C_5^3 \cdot C_{95}^{42} + C_5^4 \cdot C_{95}^{41} + C_5^5 \cdot C_{95}^{40}$$

iar numărul cazurilor posibile rămîne C_{100}^{45}. Rezultă

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{95}^{44} + C_5^2 \cdot C_{95}^{43} + C_5^3 \cdot C_{95}^{42} + C_5^4 \cdot C_{95}^{41} + C_5^5 \cdot C_{95}^{40}}{C_{100}^{45}}$$

VIII.13. Într-o cameră sînt studenţi în primul an, în al doilea an sau în al treilea an de studii. Se iau la întîmplare doi studenţi şi unul dintre ei declară că este mai mare ca celălalt. Care este probabilitatea ca el să fie din anul al treilea?

R. Notăm cu m, n, l numărul studenţilor din anul I, II şi III respectiv. Luînd un student din anul II şi unul oarecare, probabilitatea ca primul să fie mai mare este

$$\frac{m}{m + n + l - 1},$$

iar probabilitatea ca un student să fie din anul III să fie mai mare ca altul luat la întîmplare este

$$\frac{m+n}{m+n+l-1}.$$

Probabilităţile ca un student să fie din anul II, respectiv III, sînt

$$\frac{n}{m+n+l}, \frac{l}{m+n+l}.$$

Probabilitatea ca studentul cel mai mare dintre cei doi să fie din anul III este

$$\frac{\dfrac{l}{m+n+l}\cdot\dfrac{m+n}{m+n+l-1}}{\dfrac{l}{m+n+l}\,\dfrac{m+n}{m+n+l-1}+\dfrac{n}{m+n+l}\,\dfrac{m}{m+n+l-1}}=\frac{l(m+n)}{l(m+n)+mn}.$$

VIII.14. Se dau n urne $U_1, U_2, \ldots, U_n$, astfel încît urna U_i să conţină a_i bile albe şi b_i bile negre. Se extrage o bilă din urna U_1 şi dacă ea este neagră, se mai extrage o bilă din urna U_2 şi aşa mai departe pînă extragem o bilă albă. Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă dacă se fac cel mult $k(k<n)$ extracţii?

R. Fie A_i evenimentul care constă în a extrage o bilă albă din urna U_i şi B_i evenimentul care constă din extragerea unei bile negre din aceeaşi urnă. Avem

$$P(A_i)=\frac{a_i}{a_i+b_i},\ P(B_i)=\frac{b_i}{a_i+b_i}.$$

Notăm cu E_k evenimentul care constă în extragerea unei bile albe în cel mult k extracţii conform condiţiilor problemei. Bila albă poate fi extrasă din U_1 şi deci se realizează A_1, sau la a doua extracţie din U_2 dacă din U_1 s-a extras o bilă neagră şi deci se realizează evenimentul $A_2 \cap B_1$, fie din U_3 dacă din U_1 şi U_2 s-au extras bile negre, deci se realizează evenimentul $A_3 \cap B_1 \cap B_2$ ş.a.m.d. Rezultă

$$E_k = A_1 \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_3 \cap B_1 \cap B_2) \cup \ldots \cup (A_k \cap B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1})$$

şi

$$P(E_k) = P(A_1) + P(A_2 \cap B_1) + P(A_3 \cap B_1 \cap B_2) + \ldots + P(A_k \cap B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1}).$$

Evenimentele A_i şi B_i sînt independente, deci

$$P(E_k)=\frac{a_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2}\cdot\frac{b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_3}{a_3+b_3}\cdot\frac{b_2}{a_2+b_2}\cdot\frac{b_1}{a_1+b_1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{a_k}{a_k+b_k}\cdot\frac{b_{k-1}}{a_{k-1}+b_{k-1}}\cdot\frac{b_{k-2}}{a_{k-2}+b_{k-2}}\ldots\frac{b_1}{a_1+b_1}.$$

VIII.15. Cineva a scris n scrisori, le-a închis în plicuri şi apoi a scris la întîmplare pe fiecare din ele diferite adrese. Să se determine probabilitatea ca cel puţin pe un plic să fie adresa exactă.

R. Numerotăm scrisorile de la 1 la n şi notăm cu A_k evenimentul că pe plicul k s-a scris adresa exactă.

Evenimentul A „cel puţin un plic are adresa exactă" este

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

evenimentele $A_i (i = 1, \ldots, n)$ fiind compatibile. Avem

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Dacă pe k plicuri s-a scris adresa exactă, pe celelalte $n - k$ adresele se pot scrie în $(n - k)!$ noduri. Avem

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Scrierea adreselor pe plicuri este egal probabilă, deci

$$\sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k}}^{n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = C_n^k \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Rezultă

$$P(A) = C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

Pentru n foarte mare

$$P \approx 1 - \frac{1}{e}.$$

VIII.16. Fie $\{A_i\}$ şi $\{B_i\}$ două familii numărabile de evenimente. Dacă A_1 şi B_1 sînt independente şi pentru orice $i > 0$, $\complement A_1 \cap \complement A_2 \cap \ldots \cap \complement A_{j-1} \cap A_j$ şi B_j sînt independente, să se arate că

$$P(\cup (A_i \cap B_i)) \geqslant \alpha P(\cup A_i),$$

unde $\alpha = \inf P(B_i)$.

R. Dacă clasa A_i este disjunctă, inegalitatea rezultă imediat deoarece pentru orice i, A_i, și B_i sînt independente și deci

$$P(\cup (A_i \cap B_i)) = \Sigma P(A_i)\, P(B_i) \geqslant \alpha \Sigma P(A_i) = \alpha P(\cup A_i).$$

În cazul general avem

$$P(\cup (A_i \cap B_i)) = P(A_i \cap B_i) + P(\complement(A_i \cap B_i) \cap A_2 \cap B_2) +$$
$$+ P(\complement(A_1 \cap B_1) \cap \complement(A_2 \cap B_2) \cap A_3 \cap B_3) + \ldots \geqslant P(A_1 \cap B_1) +$$
$$+ P(\complement A_1 \cap A_2 \cap B_2) + P(\complement A_1 \cap \complement A_2 \cap A_3 \cap B_3) + \ldots \geqslant P(A_1) \cdot P(B_1) +$$
$$+ P(\complement A_1 \cap A_2) \cdot P(B_2) + P(\complement A_1 \cap \complement A_2 \cap A_3) \cdot P(B_3) + \ldots \geqslant P(A_1) + P(\complement A_1 \cap A_2) +$$
$$+ P(\complement A_1 \cap \complement A_2 \cap A_3) + \ldots = \alpha P(\cup A_i),$$

deci

$$P(\cup (A_i \cap B_i)) \geqslant \alpha P(\cup A_i).$$

VIII.17. Fiind date evenimentele compatibile $A_1, A_2, \ldots, A_n$, să se determine:

a) probabilitatea ca să se verifice numai un eveniment;
b) probabilitatea ca să se verifice r evenimente din n.

R. a) Ne este indiferent care din cele n evenimente se verifică. Să presupunem că se verifică evenimentul A_1. Avem

$$p_1' = P(A_1 \cap \complement A_2 \cap \complement A_3 \cap \ldots \cap \complement A_n) = P\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} \complement A_j\right)\right).$$

Evenimentul A_1 se poate exprima astfel:

$$A_1 = A_1 \cap \Omega = A_1 \cap \left[\left(\bigcap_{j=2}^{n} \complement A_j\right) \cup \complement\left(\bigcap_{j=2}^{n} \complement A_j\right)\right] =$$
$$= \left[A_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} \complement A_j\right)\right] \cup \left[A_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} A_j\right)\right].$$

Obținem

$$P(A_1) = p_1 = P\left[A_1 \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} \complement A_j\right)\right] + P\left[A_1 \cap \left(\bigcup_{j=2}^{n} A_j\right)\right] = p_1' + P\left[\bigcup_{j=2}^{n} (A_1 \cap A_j)\right] =$$
$$= p_1' + \sum_{j=2}^{n} P(A_1 \cap A_j) - \sum_{j,k=2}^{n} P(A_1 \cap A_j \cap A_k) +$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-2} \sum_{\substack{j_2, j_3, \ldots, j_n \\ j_2 < j_3 < \cdots j_n}} P(A_1 \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_n}) =$$
$$= p_1' + \sum_{j=2}^{n} p_{1j} - \sum_{\substack{j,k=2 \\ j<k}}^{n} p_{1jk} + \ldots + (-1)^{n-2} p_{12\cdots n},$$

de unde rezultă

$$p_1' = p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_{1j} + \sum_{\substack{j,k=2 \\ j<k}}^{n} p_{1jk} + \ldots + (-1)^{n-1} p_{12\cdots n}$$

În mod analog se obține

$$p_i' = p_i - \sum_{j\neq i}^{n} p_{ij} + \sum_{\substack{j,k\neq i \\ j<k}}^{n} p_{ijk} + \ldots + (-1)^{n-1} p_{12\cdots n}, \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Probabilitatea ca să verifice un singur eveniment dintre $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se obține sumînd relația de mai sus:

$$P^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} p_i - 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_{ij} + 3 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} p_{ijk} + \ldots + (-1)^{n-1} n \cdot p_{1\cdot 2\cdots n}.$$

b) Vom determina probabilitatea ca să se verifice evenimentele A_1 și A_2. Se obține

$$p_{12}' = P(A_1 \cap A_2 \cap \complement A_3 \cap \ldots \cap \complement A_n) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap \left(\bigcap_{j=3}^{n} \complement A_j\right)\right)$$

și

$$p_{12} = P(A_1 \cap A_2) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap \left(\bigcap_{j=3}^{n} \complement A_j\right)\right) + P\left(A_1 \cap A_2 \cap \left(\bigcup_{j=3}^{n} A_j\right)\right) =$$

$$= p_{12}' + \sum_{j=3}^{n} p_{12j} - \sum_{\substack{j,k=3 \\ j<k}}^{n} p_{12jk} + \ldots + (-1)^{n-3} p_{1\cdot 2\cdots n},$$

de unde rezultă

$$p_{12}' = p_{12} - \sum_{j=3}^{n} p_{12j} + \sum_{\substack{j,k=3 \\ j<k}}^{n} p_{12jk} + \ldots + (-1)^{n-3} p_{1\cdot 2\cdots n},$$

În mod analog putem obține p_{ij}'.

Probabilitatea ca să se verifice numai două din cele n evenimente (oricare din ele) va fi

$$P^{(2)} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_{ij}' = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} p_{ij} - C_3^2 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} p_{ijk} + \ldots + (-1)^{n-2} C_n^2 p_{12\cdots n}.$$

Repetînd raţionamentul, obţinem probabilitatea ca să se verifice r evenimente (oricare) din cele n

$$P^{(r)} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_r = 1 \\ i_1 < i_2 \ldots < i_r}}^{n} p'_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots i_r = 1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_r}}^{n} p_{i_1 i_2 \ldots i_r} - C_{r+1}^{r} \sum_{\substack{i_1, \ldots i_{r+1} = 1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_{r+1}}}^{n} p_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-r} C_n^r p_{12 \ldots n}.$$

VIII.18. La fiecare încercare probabilitatea apariţiei unui eveniment este egală cu p. Cu ce probabilitate are loc evenimentul de un număr par de ori în n încercări?

R. Fie p_k probabilitatea ca după k încercări evenimentul să aibă loc de un număr par de ori. Înaintea încercării cu numărul k putem avea următoarele situaţii:

La a $(k-1)$-a încercare evenimentul a avut loc de un număr par sau impar de ori cu probabilităţile p_{k-1} şi $1 - p_{k-1}$. Rezultă

$$p_k = p_{k-1}(1-p) + (1-p_{k-1})p$$

sau

$$p_k = p + p_{k-1}(1-2p).$$

Punem ultima expresie sub forma

$$p_k - \frac{1}{2} = (1-2p)\left(p_{k-1} - \frac{1}{2}\right), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

şi facem produsul acestor egalităţi:

$$\prod_{k=1}^{n} \left(p_k - \frac{1}{2}\right) = (1-2p)^n \prod_{k=1}^{n} \left(p_{k-1} - \frac{1}{2}\right),$$

de unde se obţine

$$p_n - \frac{1}{2} = (1-2p)^n \left(p_0 - \frac{1}{2}\right);$$

Dar $p_0 = 1$, deci

$$p_n = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^n\right].$$

VIII.19. Se dau şase urne cu următoarele structuri:
(S_1) două urne care conţin cîte 2 bile albe şi 6 negre,
(S_2) trei urne care conţin cîte 3 bile albe şi 5 negre;
(S_3) o urnă care conţine 6 bile albe şi 2 negre.
Se extrage la întîmplare o bilă dintr-o urnă. Se cere:
1° Care este probabilitatea de a extrage o bilă neagră?
2° Presupunînd că dintr-o urnă oarecare s-a extras o bilă neagră, care este probabilitatea ca ea să aparţină uneia din structurile S_1, S_2 sau S_3?

R. Fie A evenimentul care constă în extragerea unei bile negre. Avem

$$A = (S_1 \cap A) \cup (S_2 \cap A) \cup (S_3 \cap A),$$

de unde rezultă

$$P(A) = P(S_1 \cap A) + P(S_2 \cup A) + P(S_3 \cap A)$$

sau

$$P(A) = P(S_1)P_{S_1}(A) + P(S_2)P_{S_2}(A) + P(S_3) \cdot P_{S_3}(A).$$

Avem

$$P(S_1) = \frac{2}{6}, \quad P(S_2) = \frac{3}{6}, \quad P(S_3) = \frac{1}{6}$$

și

$$P_{S_1}(A) = \frac{6}{8}, \quad P_{S_2}(A) = \frac{5}{8}, \quad P_{S_3}(A) = \frac{2}{8},$$

de unde rezultă

$$P(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{8} + \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{8} = \frac{29}{48}.$$

2° Se aplică formula Bayes

$$P_A(S_1) = \frac{P(S_1)P_{S_1}(A)}{P(A)} = \frac{12}{29};$$

$$P_A(S_2) = \frac{P(S_2)\, P_{S_2}(A)}{P(A)} = \frac{15}{29};$$

$$P_A(S_3) = \frac{P(S_3)P_{A_3}(A)}{P(A)} = \frac{2}{29}.$$

VIII.20. Pentru n persoane se extrag la întîmplare $m \leqslant n$ lozuri dintr-o urnă cu n lozuri. Sînt egale șansele de cîștig pentru oricare jucător? Cînd este mai avantajos să extragi un loz?

R. Fie A_k evenimentul care constă în extragerea unui loz cîștigător după k lozuri extrase din urmă. După rezultatele încercărilor precedente se pot face $k + 1$ ipoteze. Fie H_{ks} ipoteza ca din k lozuri extrase s să fie cîștigătoare. Avem

$$P(H_{ks}) = \frac{C_m^s C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k}, \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

și

$$P(H_{ks}) = 0 \text{ dacă } s > m.$$

Au rămas $n - k$ lozuri din care $m - s$ sînt cîștigătoare cu $m \geqslant s$;

$$P(A_k \mid H_{ks}) = \frac{m - s}{n - k},$$

După formula probabilității totale găsim

$$P(A_k) = \sum_{s=0}^{k} \frac{C_m^s C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k} \cdot \frac{m-s}{n-k}, \text{ cu } C_m^s = 0 \text{ pentru } s > m,$$

sau

$$P(A_k) = \frac{m}{n} \sum_{s=0}^{k} \frac{C_{m-1}^s C_{n-m}^{k-s}}{C_{n-1}^k}.$$

Avem

$$\sum_{s=0}^{k} C_{m-1}^s C_{u-m}^{k-s} u^{n-k-1} = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{k} C_k^s \frac{d^s u^{m-1}}{du^s} \cdot \frac{d^{k-s} u^{n-m}}{du^{k-s}} =$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{du^k} (u^{m-1} - u^{n-m}) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{du^k} (u^{n-1}) = C_{n-1}^k u^{n-k-1},$$

de unde rezultă că

$$\sum_{s=0}^{k} C_{m-1}^s C_{n-m}^{k-s} = C_{n-1}^k.$$

Pentru orice k.

$$P(A_k) = \frac{m}{n}.$$

Rezultă că șansele tuturor jucătorilor sînt egale și succesiunea extragerilor nu are importanță.

VIII.21. O informație telegrafică constă din semnale „liniuțe" și „puncte". În medie se deformează $\frac{2}{5}$ din semnalele cu „puncte" și $\frac{1}{3}$ din cele cu „liniuțe". Este cunoscut că semnalele „puncte" și „liniuțe" se întîlnesc în raportul $\frac{5}{3}$.

Să se determine probabilitatea ca:

a) primind un semnal consacrat, acesta să fie „punct" și

b) probabilitatea ca el să fie „liniuță".

R. Notăm prin A evenimentul de primire a semnalului „punct" iar prin B evenimentul de primire a semnalului „liniuță".

Se pot considera următoarele ipoteze: H_1 — este transmis semnalul „punct" H_2 — este transmis semnalul „liniuță".

Avem

$$\frac{P(H_1)}{P(H_2)} = \frac{5}{3}, \quad P(H_1) + P(H_2) = 1.$$

deci

$$P(H_1) = \frac{5}{8}, \quad P(H_2) = \frac{3}{8}$$

şi

$$P(A \mid H_1) = \frac{3}{5}, \quad P(A \mid H_2) = \frac{1}{3}, \quad P(B \mid H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(B \mid H_2) = \frac{2}{3}.$$

După formula probabilităţii totale avem

$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Avem pentru cele două probabilităţi:

$$\text{a) } P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)\, P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{3}{4},$$

$$\text{b) } P(H_2 \mid B) = \frac{P(H_2)\, P(B \mid H_2)}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

VIII.22. Se împart la întîmplare r cărţi la n persoane. Care este probabilitatea ca m persoane să nu ia nici o carte $(0 < m < n)$?

R. Numerotînd persoanele de la 1 la n şi fie A_k evenimentul ca persoana k să nu primească nici o carte $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Notăm

$$p_i = P(A_i), \; p_{ij} = P(A_i \cap A_j), \; p_{ijk} = P(A_i \cap A_j \cap A_k) \text{ etc.}$$

În funcţie de numărul cazurilor favorabile şi al celor posibile avem

$$p_i = P(A_i) = \frac{(n-1)^r}{n^r} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r, \; i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$p_{ij} = P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)^r}{n^r} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^r, \; \underset{i<j}{i, j} = 1, 2, \ldots, n;$$

. . . . . .

$$p_{ij\ldots\nu} = P(A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_\nu) = \frac{(n-\nu)^r}{n^r} = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^r; \; \nu \leqslant n.$$

Notăm cu $p_m(r, n)$ probabilitatea ca m persoane să nu primească nici o carte, $p_0(r, n)$ va fi probabilitatea ca toate persoanele să aibă cărţi şi ea va fi

$$p_0(r, n) = 1 - S_1 + S_2) + \ldots + (-1)^{n-1} S_n,$$

unde

$$S_\nu = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_\nu} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap (A_{i_\nu}) = \sum_{i_1 < \cdots < i_\nu} p_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} = C_n^\nu \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^r$$

Rezultă

$$p_0(r, n) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu C_n^\nu \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^r$$

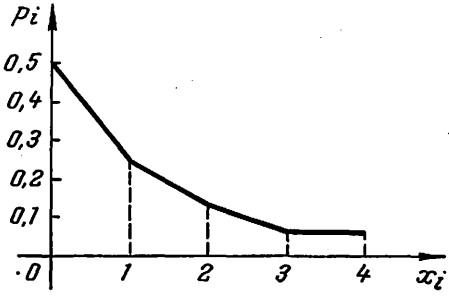
şi

$$p_m(r, n) = C_n^m \left(1 - \frac{m}{n}\right)^r p_0(r, n-m) = C_n^m \sum_{\nu=0}^{n-m} (-1)^\nu C_{n-m}^\nu \left(1 - \frac{m+\nu}{n}\right)^r.$$

VIII.23. Pe drumul de circulaţie a maşinilor sînt 4 semafoare. Fiecare din ele permite sau interzice trecerea maşinilor cu probabilitatea $\frac{1}{2}$. Să se construiască poligonul repartizării probabilităţilor numărului de semafoare întîlnite de maşini pînă la prima oprire.

R. Fie X numărul (aleator) de semafoare întîlnite de maşini pînă la prima oprire. El poate lua valorile

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4.$$



VIII.23

Notăm $p_i = P(X = x_i)$ şi avem

$$p_i = P(X = x_i) = \begin{cases} p(1-p)^{i-1}, & i = 1, 2, 3, 4; \\ (1-p)^4, & i = 5, \end{cases}$$

unde p este probabilitatea ca semaforul să interzică trecerea maşinii $\left(p = \frac{1}{2}\right)$. Obţinem:

$$p_1 = 0{,}5;\ p_2 = 0{,}25;\ p_3 = 0{,}125;\ p_4 = 0{,}0625;\ p_5 = 0{,}0625,$$

iar poligonul probabilităţilor este dat în fig. VIII.22.

VIII.24. O maşină automată produce două piese pe minut şi în producţia unui schimb dă 40 piese defecte. Procesul se supune

legii Poisson. Să se determine probabilitatea ca din cinci piese cel puţin două să fie defecte.

R. În medie, într-un minut, maşina produce (un schimb are 480 min)

$$a = \frac{40}{480} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083 \text{ piese defecte.}$$

Proba de cinci piese la maşină se efectuează în $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ min. În acest timp maşina produce

$$\lambda = at = 0{,}083 \cdot \frac{5}{2} \approx 0{,}207 \approx 0{,}2$$

piese defecte. Procesul urmînd o lege Poisson, dacă notăm cu $P_{0,2}(m)$ probabilitatea ca la cinci piese, m să fie defecte, avem

$$P_{0,2}(m) = \frac{(0{,}2)^m}{m!} e^{-0{,}2}.$$

Probabilitatea cerută este

$$p = P_{0,2}(2) + P_{0,2}(3) + P_{0,2}(4) + P_{0,2}(5) \approx 0{,}0175.$$

VIII.25. O staţie radar explorează o regiune cu 10 obiective. Probabilitatea de detectare a fiecăruia din obiective este egală cu p (independent de detectarea altor obiective). Fiecare ciclu durează un timp t. Să se determine timpul necesar pentru detectarea în medie a 3 obiective.

R. După n cicluri un obiectiv oarecare este detectat cu o probabilitate egală cu

$$P_n = 1 - (1 - p)^n,$$

iar valoarea medie a numărului de obiective X detectate în n cicluri este

$$M(X) = 10\,[1 - (1 - p)^n] = 3.$$

Ecuaţia din care rezultă numărul necesar de cicluri n este

$$1 - (1 - p)^n = \frac{3}{10}$$

de unde

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{10}\right)}{\ln(1 - p)}.$$

Timpul necesar pentru detectarea în medie a 3 obiective este

$$T = tn = t\frac{\ln\left(1 - \frac{3}{10}\right)}{\ln(1-p)}.$$

VIII.26. Să se determine timpul de ieşire din funcţiune a unui sistem care conţine n lămpi electronice dacă termenul mediu de funcţionare a fiecărei lămpi este de τ ore. Probabilitatea de ieşire din funcţionare a unei lămpi în funcţie de timp este $q(T)$ şi se presupune constantă.

R. Se presupune că ieşirea din funcţiune a lămpilor formează evenimente egal probabile, iar lămpile sînt de acelaşi tip.

Probabilitatea de ieşire din funcţiune a unei lămpi este

$$P(t) = \int_0^t q(T)\,dt = qt.$$

Cum o lampă are τ ore de funcţionare, atunci $q\tau = 1$ şi deci

$$P(t) = \frac{t}{\tau}.$$

Dacă $P(t)$ este probabilitatea de ieşire din funcţiune a sistemului, atunci

$$P_s(t) = \frac{nt}{\tau}.$$

VIII.27. Fie $0 < p < \frac{1}{2}$, $q = 1 - p$ şi n un întreg astfel că $np = m$, m fiind tot un întreg. Fie A un eveniment de probabilitate p. Să se arate că în n probe independente rezultatele posibile fiind A şi $\complement A$, probabilitatea ca A să se realizeze cel mult de m ori este mai mare decît probabilitatea ca A să se realizeze mai mult de m ori.

R. Avem de demonstrat inegalitatea

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k q^{n-k} > \sum_{k=m+1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (1)$$

Notăm

$$B_r = C_n^{m-r} p^{m-r} q^{n-m+r}, \ (r = 0, 1, \ldots, m).$$

$$C_r = C_n^{m+r} p^{m+r} q^{n-m-r}, \ (r = 0, 1, \ldots, n-m).$$

Inegalitatea (1) se scrie sub forma

$$\sum_{r=0}^{m} B_r > \sum_{r=0}^{n-m} C_r. \tag{1'}$$

Punînd $\frac{B_r}{C_r} = D_r$, constatăm că

$$\frac{D_{r+1}}{D_r} - 1 = \frac{(p-q)(r^2+r-npq)}{(n-m-r)(n-m+r+1)p^2};$$

$\frac{D_{r+1}}{D_r} - 1$ este deci pozitiv pentru valori mici ale lui r, descreşte cînd r creşte şi este negativ pentru $r \geqslant s$, unde s este un întreg mic astfel ca $s(s+1) > npq$. Dar $D_0 = 1$, $D_1 = \frac{B_1}{C_1} = \frac{npq+q}{npq+p} > 1$, există totdeauna un întreg k astfel ca

$$\frac{B_r}{C_r} \geqslant 1, \text{ pentru } r = 0, 1, \ldots, k-1,$$

$$\frac{B_r}{C_r} < 1, \text{ pentru } k \leqslant r \leqslant n-m.$$

Pentru această valoare a lui k avem

$$\sum_{r=0}^{k-1} (k-r-1) B_r > \sum_{r=0}^{k-1} (k-r-1) C_r \tag{2}$$

şi

$$-\sum_{r=k}^{m} (r-k+1) B_r > -\sum_{r=k}^{n-m} (r-k+1) C_r. \tag{3}$$

Din identitatea

$$\sum_{k=0}^{n} (k-m) C_n^k p^k q^{n-k} = 0$$

rezultă

$$\sum_{r=0}^{m} r B_r = \sum_{r=0}^{n-m} r C_r. \tag{4}$$

Din (2), (3) şi (4) obţinem

$$(k-1) \sum_{r=0}^{m} B_r > (k-1) \sum_{r=0}^{n-m} C_r.$$

VIII.28. Pe una din benzile de magnetofon de lungime de 200 m este imprimată o informaţie pe un interval de 20 m. Pe altă bandă este imprimată o informaţie analogă. Să se determine probabilitatea ca în intervalul de la 60 la 85 m să nu fie intervale de bandă

neimprimate, dacă începutul ambelor informații este egal posibil în orice punct de la 0 pînă la 180 m.

R. Fie x și y coordonatele originii imprimării cu $x \geqslant y$. Deoarece $0 \leqslant x \leqslant 180$ și $0 \leqslant y \leqslant 180$, domeniul valorilor posibile ale lui x și y reprezintă un triunghi cu catetele de 180 m. Suprafața lui este $S = \frac{1}{2} \cdot 180^2$ m². Pentru a obține o imprimare continuă este necesar ca $x - y \leqslant 20$ m, iar ca intervalul imprimării să nu fie mai mic de 25 m trebuie ca $x - y \geqslant 5$ m (fig. VIII.28). În afară de aceasta pentru obținerea unei imprimări continue pe intervalul de la 60 m pînă la 85 m trebuie ca

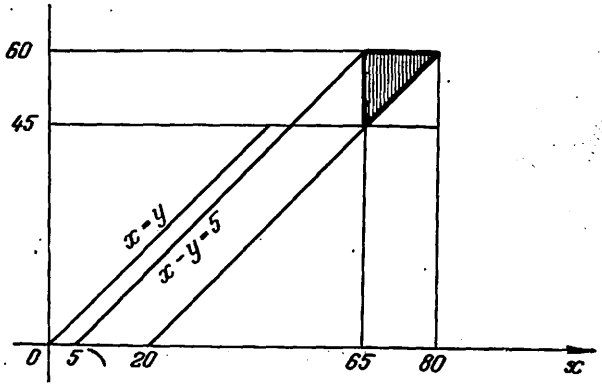


Fig. VIII. 28.

$$45 \text{ m} \leqslant y \leqslant 60 \text{ m},$$

$$65 \text{ m} \leqslant x \leqslant 80 \text{ m}.$$

Trasînd frontierele domeniului indicat, obținem triunghiul de suprafață $S = \frac{1}{2} \cdot 15$ m² în care sînt cuprinse valorile favorabile ale lui x și y. Probabilitatea cerută este deci

$$p = \frac{S_F}{S} = \left(\frac{15}{180}\right)^2 = \frac{1}{144}.$$

VIII.29. Care este probabilitatea ca suma a două numere pozitive luate la întîmplare să nu depășească unitatea, fiecare din ele nefiind mai mari ca unitatea iar produsul lor să nu fie mai mare ca $\frac{2}{9}$?

R. Fie x și y numerele luate la întîmplare. Valorilor posibile $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ le corespunde în plan pătratul de arie $S = 1$. Valorile favorabile satisfac condițiile

$$x + y \leqslant 1, \quad xy \leqslant \frac{2}{9}.$$

Frontiera $x + y = 1$ împarte pătratul în două părţi egale, iar domeniul $x + y \leqslant 1$ reprezintă triunghiul inferior. A doua frontieră $xy = \frac{2}{9}$ reprezintă o hiperbolă, (fig. VIII.29).

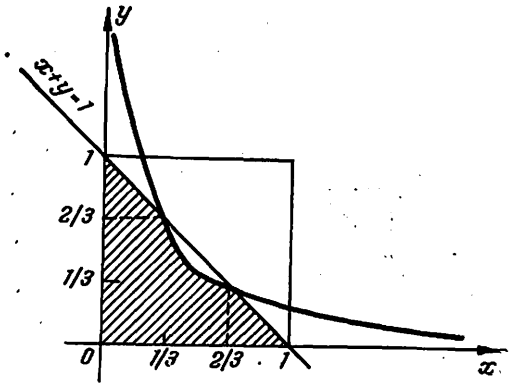


Fig. VIII.29.

Mărimea suprafeţei favorabile este

$$S_F = \frac{1}{3} + \int_{1/3}^{2/3} y\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2.$$

Probabilitatea cerută este

$$p = \frac{S_F}{S} = 0{,}487.$$

VIII.30. Pe un segment AB de lungime a se iau la întîmplare două puncte P şi Q. Să se determine probabilitatea ca distanţa PQ să fie mai mică decît $b (b \leqslant a)$.

R. Fie xOy un sistem de coordonate cu originea în A şi astfel ca segmentul dat să fie pe axa Ox. Fie $P(x_1, 0)$, $Q(x_2, 0)$. Punctul de coordonate (x_1, x_2) aparţine pătratului $ABCD$ (fig. VIII. 30). Mulţimea cazurilor posibile este formată, deci, din punctele pătratului $ABCD$.

Mulţimea cazurilor favorabile este formată din punctele, ale căror coordonate verifică condiţia $(x_2 - x_1) \leqslant b$, adică din punctele interioare figurii $AMNCRS$.

Avem

$$p = \frac{\text{aria}(AMNCRS)}{\text{aria}(ABCD)} = \frac{a^2 - (a-b)^2}{a^2} = 2\frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2}.$$

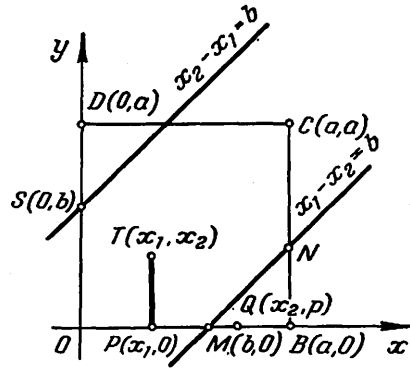


Fig. VIII.30

VIII.31. Se dă funcţia

$$f(x) = ax^2 e^{-kx}, \quad (k > 0,\ 0 \leqslant x < \infty).$$

Se cere :

1°. Să se determine a astfel încît $f(x)$ să fie o densitate de repartiţie.

2°. Să se calculeze funcția de repartiție corespunzătoare.

3°. Să se determine probabilitatea ca variabila aleatoare ξ să fie cuprinsă în intervalul $\left(0, \frac{1}{k}\right)$.

R. Pentru ca $f(x)$ să fie densitatea unei repartiții, trebuie ca

$$\int_0^\infty ax^2 e^{-kx}\, dx = 1.$$

Integrînd de două ori prin părți, obținem

$$a\int_0^\infty x^2 e^{-kx}\, dx = \frac{2a}{k^3},$$

de unde rezultă

$$a = \frac{k^3}{2} \text{ și } f(x) = \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx}.$$

2° Avem

$$F(x) = \int_0^x \frac{k^3}{2} u^2 e^{-ku}\, du = 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2} e^{-kx}.$$

3° $P\left(0 < \xi < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0{,}086.$

VIII.32. Se consideră variabilele aleatoare ξ, η independente de densități

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases}; \qquad f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ bxe^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0. \end{cases}$$

1°. Să se determine constantele a şi b, aşa încît funcţiile date să fie densităţi de probabilitate.

2°. Să se determine legea de probabilitate a variabilei aleatoare $\zeta = \xi\eta$.

R. 1°. Din condiţia $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$ avem $\frac{1}{a}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$, de unde rezultă $a = \frac{1}{\pi}$. Analog se determină $b = 1$.

2°. Cuplul (ξ, η) are densitatea $\frac{ye^{-\frac{y^2}{2}}}{\pi\sqrt{1-\frac{z^2}{y^2}}}\cdot\frac{1}{y}$ pe domeniul $y > 0$, $0 < |z| < y$, deoarece iacobianul transformării $(x, y) \to (z, y)$ este $\frac{1}{y}$. Densitatea lui ζ este deci

$$f_\zeta(z) = \frac{1}{\pi}\int_z^\infty \frac{ye^{-\frac{y^2}{2}}}{y^2 - z^2}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}-\frac{z^2}{2}}\cdot du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{2}},$$

deci ζ este variabilă aleatoare gaussiană.

VIII.33. Fie $F(x)$ şi $\varphi(t)$, funcţia de repartiţie, respectiv funcţia caracteristică a unei legi de probabilitate care are un moment de ordinul al doilea μ_2.

Să se arate că $-\frac{1}{\mu_2}\varphi''(t)$ este o funcţie caracteristică.

R. Fie

$$G(x) = \frac{1}{\mu^2}\int_{-\infty}^{x} y^2\,dF(y).$$

Funcţia $G(x)$ este crescătoare, continuă dacă $F(x)$ este continuă şi $G(-\infty) = 0$, $G(+\infty) = 1$, deci $G(x)$ este o funcţie de repartiţie.

Existenţa momentului de ordinul al doilea asigură existenţa lui $\varphi''(t)$, respectiv

$$\varphi''(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{itx}\,dF(x),$$

de unde

$$\psi(t) = -\frac{1}{\mu_2}\varphi''(t) = \frac{1}{\mu_2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{itx}\, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dG(x),$$

ceea ce arată că $\psi(t)$ este transformata Fourier a funcţiei de repartiţie $G(x)$ şi este o funcţie caracteristică.

VIII.34. Fie (ξ, η) o pereche de variabile aleatoare a cărei lege de probabilitate în planul xOy este invariantă la o rotaţie de centru O şi absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue.

1°. Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $\zeta = \frac{\eta}{\xi}$.

2°. Să se determine funcţia caracteristică a variabilei aleatoare ζ.

3°. Să se determine densităţile de probabilitate a variabilelor ξ şi η dacă ele sînt independente.

R. 1°. Variabila aleatoare ζ are densitatea de probabilitate de forma $f_\zeta(x^2 + y^2)$ cu

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2 + y^2)\, dx\, dy = 1. \tag{1}$$

Trecînd la coordonate polare

$$\int_0^{\infty} f(\rho^2)\, \rho d\rho = \frac{1}{2\pi}. \tag{2}$$

Densitatea variabilei ζ este, ţinînd seama de (1) şi (2) $(x = x,\ y = zx)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2 + x^2z^2)\, |x|\, dx = 2\int_0^{\infty} f(x^2(1 + z^2))\, x\, dx =$$

$$= \frac{2}{1 + z^2}\int_0^{\infty} f(x^2(1 + z^2))x\sqrt{1 + z^2}\, d(x\sqrt{1 + z^2}) = \frac{1}{\pi(1 - z^2)},$$

deci ζ este o variabilă aleatoare de tip Cauchy.

2°.

$$\varphi_\zeta(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx.$$

Considerăm funcția $g(z) = \dfrac{e^{itz}}{\pi(1+z^2)}$, unde z este o variabilă complexă și vom calcula $\int_C g(z)dz$ pe conturul din fig. VIII.34.

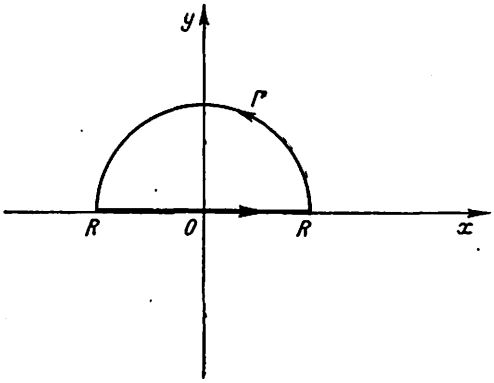


Fig. VIII.34

Avem

$$\int_C g(z)\,dz = \int_\Gamma g(z)\,dz + \int_{-R}^{R} g(z)\,dz = 2\pi i R_i(g(z)). \tag{3}$$

Dar

$$\left|\int_\Gamma g(z)\,dz\right| \leqslant \int_\Gamma |g(z)\,dz| = \int_\Gamma \frac{|dz|}{|1+z^2|} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

iar $R_i(g(z)) = \dfrac{1}{2\pi i}e^{-t}$, deci trecînd la limită în (3) pentru $R \to \infty$ obținem

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx = e^{t}$$

și

$$\varphi_\zeta(t) = e^{-|t|}.$$

3°. Dacă ξ și η sînt independente, densitatea perechii (ξ, η) este egală cu produsul densităților celor două variabile. Există deci două funcții g și h așa încît

$$f(x^2 + y^2) = g(x^2)\, h(y^2).$$

Dar $f(x^2 + y^2)$ este simetrică în x și y, deci

$$f(x^2 + y^2) = g(x^2)\, g(y^2).$$

De aici deducem că $f(x^2) = g(0)\, g(x^2)$ cu $g(0) > 0$ deci

$$f(x^2 + y^2) = \frac{1}{g^2(0)} f(x^2)\, f(y^2),$$

prin urmare

$$f(x^2) = Ce^{-kx^2}.$$

Variabilele ξ și η sînt normale.

VIII.35. Să se determine densitatea de repartiție corespunzătoare funcției caracteristice

$$\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

R. Dezvoltăm funcția $\varphi(t)$ în serie de puteri. Avem

$$\varphi(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{ikt}.$$

Vom determina mai întîi funcția de repartiție știind că

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{itx}}{it} \varphi(t)\, dt.$$

Obținem

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikt} - e^{it(k-x)}}{it}\, dt =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left[\int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{\pi t}\, dt - \int_0^{\infty} \frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\, dt \right].$$

Pentru

$$x > 0, \int_0^\infty \frac{\sin tx}{\pi t}\, dt = \frac{1}{2} \quad \text{şi}$$

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2} - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^\infty \frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} - e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^\infty \frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\, dt - e^{-\lambda} \sum_{k=[x]+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^\infty \frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\, dt.$$

Ţinînd seama de relaţiile

$$\int_0^\infty \frac{\sin t(k-x)}{\pi t}\, dt = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k > x \\ -\frac{1}{2}, & k < x \end{cases} ; \quad 1 = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=[x]+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!},$$

obţinem

$$F(x) - F(0) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Am obţinut funcţia de repartiţie a unei variabile Poisson care în punctul k are masa $e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$.

VIII.36. O particulă se mişcă pe axa Ox. La momentul $t = 0$ se află în poziţia $X(0) = 0$. Vom presupune că t, ca variabilă aleatoare, are repartiţie uniformă pe intervalul $0 < t < 1$ şi că particula se deplasează uniform cu viteza v în direcţia pozitivă Ox. Să se calculeze funcţia de repartiţie şi densitatea poziţiei $X(t)$ în momentul arbitrar t, din intervalul $0 < t < 1$.

R. Considerăm date valorile pentru t şi x şi fie t_0 momentul cînd particula începe să se mişte. În acest caz

$$P(X(t) \leqslant x) = P(v(t - t_0) \leqslant x) = P\left(t_0 \geqslant t - \frac{x}{v}\right).$$

Pentru $x > vt$, $t - \frac{x}{v} < 0$ şi $P\left(t_0 \geqslant t - \frac{x}{v}\right) = 1 = P(t_0 \geqslant 0)$.

Dacă $0 \leqslant x \leqslant vt$, cum t are repartiţie uniformă avem

$$P\left(t_0 \geqslant t - \frac{x}{v}\right) = 1 - \left(t - \frac{x}{v}\right) = 1 - t + \frac{x}{v}.$$

Pentru t dat, funcţia de repartiţie este

$$F(x) = \begin{cases} 1 - t + \dfrac{x}{v}, & 0 \leqslant x \leqslant vt, \\ 1, & x > vt. \end{cases}$$

Deci probabilitatea ca în momentul t particula să fie în originea coordonatelor este $1 - t$.

Notăm cu $f(x)$ densitatea de repartiţie şi cu $f_1(x)$ funcţia

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant vt, \\ 0, & vt < x, \end{cases}$$

atunci

$$f(x) = (1 - t)\,\delta(x) + \frac{f_1(x)}{v},$$

unde $\delta(x)$ este funcţia delta (sau impulsul elementar):

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0,$$

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = 1, \qquad a < x < b.$$

VIII.37. Fie variabilele aleatoare ξ_k $(k = 1, \ldots, \nu)$ independente între ele şi independente de ν. Dacă funcţiile lor de repartiţie sînt $F_k(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pentru $x \geqslant 0$, să se determine funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare $\eta_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_\nu$ ştiind că

$$P(\nu = n) = p_n = C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k}, \quad (n = k,\ k + 1,\ \ldots).$$

R. Fie variabilele aleatoare

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Dacă notăm cu $G_n(x)$ funcţiile lor de repartiţie, avem

$$G_n(x) = \int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}\,dt.$$

Notînd cu $H_\nu(x)$ funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare η_ν, din teorema probabilităţii totale rezultă

$$H_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} p_n G_n(x).$$

Deci

$$H_k(x) = \int_0^x \frac{(p\lambda)^k t^{k-1} e^{-p\lambda t}}{(k-1)!} \, dt.$$

Variabila aleatoare η_ν are deci o distribuţie Γ de ordinul k şi de parametru $p\lambda$, (vezi Introducere).

VIII.38. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente avînd aceeaşi densitate de repartiţie

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{e^x + e^{-x}}.$$

Să se calculeze densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare $\zeta = \xi + \eta$.

R. Densitatea de repartiţie este

$$f_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u) f_\eta(z-u) \, du = \frac{4}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^u + e^{-u}} \cdot \frac{1}{e^{z-u} + e^{-(z-u)}} \, du =$$

$$= \frac{4e^z}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2u}}{(1 + e^{2u})(e^{2z} + e^{2u})} du.$$

Facem schimbarea de variabilă $e^{2u} = v$ şi obţinem

$$f_\zeta(z) = \frac{2e^z}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)(e^{2z}+v)} = \frac{4ze^z}{\pi^2(e^{2z}-1)}; \quad -\infty < z < +\infty.$$

VIII.39. Se dau variabilele aleatoare ξ şi η avînd aceeaşi densitate de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in (0, 2), \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se determine funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare $\zeta = \xi + \eta$.

R. Variabilele ξ şi η sînt independente. Avem

$$G(z) = P(\zeta < z) = P(\xi + \eta < z) = \iint_{(S)} f(x) f(y) \, dx dy = \frac{1}{4} \iint_S dx \, dy = \frac{1}{4} S(z),$$

unde $S(z)$ este aria suprafeţei interioare a pătratului $OABC$ mărginite de dreapta $x + y = z$ (fig. VIII. 39, *a*).

Dacă $z \leqslant 0$, $S(z) = 0$ deci $G(z) = 0$.

Dacă $0 < z < 2$, $G(z) = \frac{1}{4} S_{\Delta ODE} = \frac{1}{4} \frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{8}$ (fig. VIII. 39,*a*)

Dacă $2 < z < 4$, $G(z) = \frac{1}{4} S_{OAHFC} = 1 - \frac{(4-z)^2}{8}$ (fig. VIII. 39,*b*).

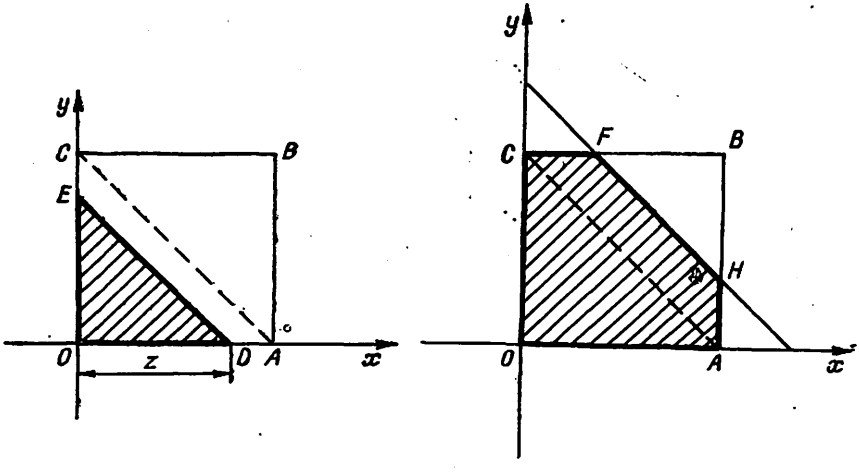


Fig. VIII 29, a, b

Dacă $z > 0$, $G(z) = \frac{1}{4} S_{OABC} = 1$.

Deci

$$G(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ \frac{z^2}{8}, & 0 < z < 2, \\ 1 - \frac{(4-z)^2}{8}, & 2 < z < 4, \\ 1 & z > 4, \end{cases}$$

iar densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare ζ este

$$g(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \leqslant 0, \\ \frac{z}{4} & , \quad 0 < z < 2, \\ 1 - \frac{z}{4}, & 2 < z < 4 \\ 0 & , \quad z > 4. \end{cases}$$

VIII.40. Să se determine densitatea de probabilitate a sumei a două variabile aleatoare independente $\zeta = \xi + \eta$, unde ξ este uniform repartizată în intervalul $(0, 1)$ iar η este distribuită Simpson

$$f_\eta(y) = \begin{cases} y, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 2 - y, & 1 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0, & y < 0,\ y > 2. \end{cases}$$

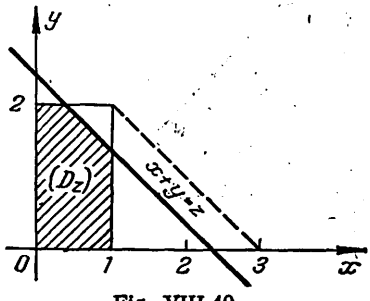


Fig. VIII.40

R. Deoarece funcțiile $f_\xi(x)$ și $f_\eta(y)$ sînt diferite de zero numai în intervalele determinate de argumentele lor, este mai comod să determinăm mai întîi funcția de repartiție a variabilei aleatoare ζ. Avem

$$F_\zeta(z) = P(\zeta < z) = \iint\limits_{D_z} f_\xi(x) f_\eta(y)\, dx dy,$$

unde D_z este domeniul în interiorul căruia $x + y < z$ și nici una din funcțiile $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$ nu sînt nule (fig. VIII.40). Calculînd integralele avînd în vedere cele trei intervale, găsim

$$F_\zeta(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \displaystyle\int_0^z f_\eta(y)\, dy \int_0^{z-y} f_\xi(x)\, dx = \frac{z^3}{6}, & 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ \displaystyle\int_0^{z-1} dx \int_0^1 y\, dy + \int_0^{z-1} dx \int_1^{z-x} (2-y)\, dy + \int_{x-1}^1 dx \int_0^{z-x} y\, dy = & \\ \displaystyle = z - 1 + \frac{(2-z)^3}{6} - \frac{(z-1)^3}{6}, & 1 \leqslant z \leqslant 2, \\ \displaystyle 1 - \int_{z-1}^2 (2-y)\, dy \int_{z-y}^1 dx = 1 - \frac{1}{6}(3-z)^3, & 2 \leqslant z \leqslant 3, \\ 1, & z > 3. \end{cases}$$

Derivînd în raport cu z, găsim

$$f_\zeta(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2}, & 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ -z^2 + 3z - \frac{3}{2}, & 1 \leqslant z \leqslant 2, \\ \frac{1}{2}(z^2 - 6z + 9), & 2 \leqslant z \leqslant 3, \\ 0, & z < 0,\ z > 3. \end{cases}$$

VIII.41. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente; ξ avînd o distribuţie exponenţială de densitate $\lambda e^{-\lambda x}$, $(x > 0)$ şi η este uniformă în $(0, 2\pi)$. Punînd $\zeta_1 = \sqrt{\xi} \cdot \cos \eta$ şi $\zeta_2 = \sqrt{\xi} \sin \eta$, să se arate că ζ_1 şi ζ_2 sînt independente şi au aceeaşi densitate $\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda x^2}$.

R. Prin definiţie avem

$$P(\zeta_1 < u,\ \zeta_2 < v) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\substack{\sqrt{x}\cos y < u \\ \sqrt{x}\sin y < v}} \lambda e^{-\lambda x}\, dx\, dy.$$

Facem schimbarea de variabile $\alpha = \sqrt{x} \cos y$, $\beta = \sqrt{x} \sin y$. Avem

$$x = \alpha^2 + \beta^2,\ y = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha},\ \frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} = 2.$$

$$P(\zeta_1 < u,\ \zeta_2 < v) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{u} \int_{-\infty}^{v} e^{-\lambda(\alpha^2+\beta^2)}\, d\alpha\, d\beta =$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\lambda\alpha^2} d\alpha \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{v} e^{-\lambda\beta^2} d\beta = \Phi(\sqrt{2\lambda}u) \cdot \Phi(\sqrt{2\lambda}v),$$

unde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

VIII.42. Fie ξ, η, ζ componentele vitezei unei molecule de gaz. Se presupune că aceste componente sînt independente şi uniform repartizate în $(-A, +A)$. Să se calculeze densitatea energiei acestei molecule, $f_A(x)$, şi să se determine

$$\lim_{A\to+\infty} A^3 \cdot f_A(x).$$

R. Fie m masa şi ε energia unei molecule. Avem

$$\varepsilon = \frac{m}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

deci

$$P(\varepsilon < t) = \frac{1}{8A^3} \iiint\limits_{\frac{m}{2}(x^2+y^2+z^2)<t} dxdydz = \frac{\pi}{6A^3}\left(\frac{2t}{m}\right)^{3/2}$$

pentru $\sqrt{\frac{2t}{m}} < A$, deoarece integrala reprezintă volumul unei sfere de rază $\sqrt{2t/m}$.

Deci

$$f_A(t) = \left(\frac{2}{m}\right)^{3/2} \cdot \frac{\pi}{4A^3} \cdot \sqrt{t} \text{ pentru } \sqrt{\frac{2t}{m}} < A,$$

de unde rezultă

$$\lim_{A\to+\infty} A^3 f_A(t) = c\sqrt{t}, \quad (c = \text{const}).$$

VIII.43. Se consideră funcţia $f : (-1, 1) \times (-1, 1) \to R$ definită astfel :

$$f(x, y) = a[1 + xy(x^2 - y^2)].$$

1°. Să se determine valorile lui a pentru care funcţia dată este o densitate de repartiţie.

2°. Să se calculeze funcţia caracteristică a acestei legi de probabilitate.

3°. Să se scrie repartiţiile marginale şi funcţiile lor caracteristice.

4°. Să se determine funcţia caracteristică a variabilei aleatoare $\xi + \eta$.

R. 1°. Din condiţia

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

rezultă

$$a\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[1+xy(x^2-y^2)]\,dx\,dy = a\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}dx\,dy -$$

$$-a\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xy(x^2-y^2)\,dx\,dy = 4a$$

şi $a = \frac{1}{4}$.

2°. $\varphi_{(\xi,\eta)}(u, v) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{i(ux+vy)}[1+xy(x^2-y^2)]\,dx\,dy = \frac{\sin u}{u}\cdot\frac{\sin v}{v} - \left(\frac{\cos v}{v} - \frac{\sin v}{v^2}\right)\left(-\frac{\cos u}{u} + \frac{3\sin u}{u^2} + 6\frac{\cos u}{u^3} - 6\frac{\sin u}{u^4}\right) - \left(\frac{\cos u}{u} - \frac{\sin u}{u^2}\right)\left(-\frac{\cos v}{v} + 3\frac{\sin v}{v^2} + 6\frac{\cos v}{v^3} - 6\frac{\sin v}{v^4}\right)$.

3°. $f_\zeta(x) = \int_{-1}^{1} f(x, y)\,dy$ de unde

$$f_\zeta(x) = \begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[-1, 1],\\ 0, & \text{în rest.}\end{cases}$$

Analog

$$f_\eta(y) = \begin{cases}\frac{1}{2}, & y\in[-1, 1],\\ 0, & \text{în rest.}\end{cases}$$

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

4°. $$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{(\xi,\eta)}(t, t) = \frac{\sin^3 t}{t^2}.$$

Avem un exemplu în care funcţia caracteristică a variabilei aleatoare $\xi + \eta$ este egală cu produsul funcţiilor caracteristice a celor două variabile, deşi ele nu sînt independente.

VIII.44. Fiind dată densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare bidimensionale, continue (ξ, η)

$$f(x, y) = \begin{cases} 2xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0 \quad , & x < 0 \text{ sau } y < 0, \end{cases}$$

să se determine valorile medii ale componentelor $M(\xi)$, $M(\eta)$ şi dispersiile $D^2(\xi)$ şi $D^2(\eta)$.

R. $$f_\xi(x) = \int_0^\infty f(x, y)\,dy = 2xe^{-x^2}\int_0^\infty ye^{-y^2}\,dy = xe^{-x^2},\ x > 0,$$

$$f_\eta(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,dx = ye^{-y^2},\ y > 0.$$

$$M(\xi) = \int_0^\infty xf_\xi(x)\,dx = \int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

$$M(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

$$D^2(\xi) = \int_0^\infty x^2f_\xi(x)\,dx - M^2(\xi) = \int_0^\infty x^3e^{-x^2}\,dx - \frac{\pi}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{8}\right).$$

$$D^2(\eta) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{8}\right).$$

VIII.45. 500 de aparate de tipul I şi 1 000 aparate de tipul II cu aceeaşi destinaţie sînt în serviciu. Ele trebuie reparate după exploatare cu probabilităţile de 0,3 pentru tipul I şi de 0,4 pentru tipul II.

1°. Să se determine probabilitatea ca numărul de aparate ce trebuie reparate să fie cuprins între 200 şi 350.

2°. Să se determine numărul de reparaţii n ce trebuie efectuate în atelier pentru ca probabilitatea p a numărului de aparate în reparaţie să fie $p = 0{,}90$.

R. 1°. Fie A evenimentul — aparatul trebuie reparat. Numărul de apariţii a evenimentului A este o variabilă aleatoare repartizată normal. Avem

$$M(\xi) = 500 \cdot 0{,}3 + 1\,000 \cdot 0{,}4 = 550,$$

$$D^2(\xi) = 500 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 1\,000 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 345.$$

$$P(250 \leqslant \xi \leqslant 350) \approx P(250 < \xi < 350) = P(|\xi - 300| < 50) = 2\Phi^*\left(\frac{50}{\sqrt{345}}\right) - 1,$$

(unde $\Phi^*(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

2°. $P(\xi < n) = 0{,}90 = \Phi^*\left(\dfrac{n - 300}{\sqrt{345}}\right)$.

Din anexa 1 rezultă că $\Phi^*(1{,}27) \approx 0{,}90$, deci

$$\frac{n - 300}{\sqrt{345}} = 1{,}27 \text{ de unde rezultă } n = 323{,}58.$$

VIII.46. Să se determine matricea de varianţă şi covarianţă a unei distribuţii gaussiene cu n dimensiuni nedegenerate.

R. Fie variabilele aleatoare $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, a căror densitate cu n dimensiuni este

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{|B|}{(2\pi)^n}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j}, \tag{1}$$

unde $|B|$ este determinantul matricei $B = ||b_{ij}||$. Există variabilele aleatoare gaussiene independente, centrate ξ_k, $(E(\xi_k) = 0)$ şi o matrice ortogonală $C = ||c_{jk}||$ astfel că

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\xi_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Fie $\sigma_k^2 = D^2(\xi_k)$ şi S matricea diagonală al cărei element de pe linia k şi coloana k este $\dfrac{1}{\sigma_k^2}$. Între B, S şi C avem relaţia

$$B = CSC^*,$$

C^* fiind transpusa matricei C. Dacă notăm $D_{ij} = E(\eta_i\eta_j)$, avem după (2)

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk}\sigma_k^2.$$

Matricea $||D_{ij}|| = D$ se poate deci pune sub forma $D = CS^{-1}C^*$, unde S^{-1} este matricea inversă a lui S. Deci

$$BD = CSC^*CS^{-1}C^* = I,$$

matrice unitate de ordinul n. Matricea covariantă D a distribuţiei gaussiene este deci inversa matricei B a formei pătratice care figurează la exponentul expresiei (1).

VIII.47. Contoarele utilizate pentru studiul razelor cosmice, a radioactivităţii şi a altor fenomene fizice nu înregistrează toate particulele captate de aparat; acesta, după şocul unei particule, rămîne nereceptiv un timp $h > 0$ şi nu poate înregistra particulele care sosesc în acest timp. Numărul de particule captate este deci inferior numărului de particule care sosesc în realitate. Numim „densitate virtuală a evenimentelor" numărul mediu P de particule înregistrate în unitatea de timp şi „densitate reală" numărul mediu p de particule culese efectiv. În ceea ce priveşte sosirea particulelor, facem ipoteza că probabilitatea de a primi n particule într-un interval de timp este $\frac{1}{n!}(pt)^n e^{-pt}$, $n = (1, 2, \ldots)$.

Se cere:

1°. Să se calculeze densitatea virtuală P.

2°. Să se calculeze valoarea densităţii reale care dă o densitate virtuală maximă.

3°. Să se calculeze distribuţia, valoarea medie şi dispersia duratei care separă două şocuri succesive.

4°. Dacă intensitatea de radiere este prea mare, se utilizează de obicei pentru uşurarea observaţiei un dispozitiv care nu permite înregistrarea tuturor şocurilor, ci a unui singur şoc, pe k. (În practică k este adesea o putere a lui 2). Să se calculeze densitatea virtuală a evenimentelor în acest caz.

R. 1° Probabilitatea pentru ca o particulă să sosească în intervalul de timp Δt şi să fie înregistrată este probabilitatea ca ea să sosească în intervalul de timp considerat şi pentru ca nici o particulă să nu fi sosit în intervalul de timp precedent de lungime h este $pe^{-ph}\Delta t$, de unde $P = pe^{-ph}$.

2° Dacă cunoaştem durata de nereceptivitate h şi dacă P este determinat prin experienţă, se obţine pentru p o ecuaţie transcendentă. Prin diferenţiere se găseşte că P este maxim pentru $p = \frac{1}{h}$.

3°. Presupunem că la momentul 0 un şoc a fost înregistrat şi fie $W(t)$ probabilitatea pentru ca să se scurgă cel mult un timp t pînă la următorul şoc înregistrat. Se arată uşor că $W(t)$ satisface ecuaţia diferenţială

$$W'(t) = P(1 - W(t - h)), \qquad (t > h) \qquad (1)$$

şi condiţia iniţială $W(t) = 0$ pentru $0 \leqslant t \leqslant h$, Soluţia ecuaţiei (1) este

$$W(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} P^k (1-kh)^k}{k!}, \text{ pentru } nh \leqslant t < (n+1)h, \; n = 1, 2, \ldots$$

Tot din (1) obţinem

$$1 = P\int_0^\infty tW'(t)\,dt.$$

Deci valoarea medie a duratei ce separă două înregistrări este $1/P$. Analog obţinem pentru dispersie

$$\sigma^2 = \frac{1-2hP}{P^2}.$$

Se observă că $\sigma = \frac{1}{P} = E$ pentru $h = 0$. Pentru $h > 0$ avem $\frac{\sigma}{M} < 1$. Fenomenul de nereceptivitate diminuează abaterea medie pătratică.

4° Calculăm mai întîi probabilitatea pentru ca în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ să fie culeasă o particulă al cărei rang este divizibil cu k. Este clar că probabilitatea acestui eveniment este

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{nk} t^{nk-1} e^{-pt}}{(nk-1)!}\right) \cdot \Delta t + 0(\Delta t).$$

Ea depinde de t, deci procesul nu este staţionar. Această dependenţă este slabă cînd timpul se scurge de la început este mare. Deci

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{nk} t^{nk-1} e^{-pt}}{(nk-1)!} = \frac{p}{k}. \tag{1}$$

Relaţia (1) rezultă din

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{nk} t^{nk-1} e^{-pt}}{(nk-1)!} = \frac{p}{k} \sum_{t=1}^{k-1} \omega_r e^{pt(\omega_r - 1)}, \tag{2}$$

unde $\omega_r = e^{\frac{\pi i r}{k}}$, $(r = 0, 1, \ldots, k-1)$.

Probabilitatea pentru ca să sosească o particulă al cărei rang e divizibil cu k în intervalul $(t, t+\Delta t)$ pentru t mare, este aproximativ egală cu $\frac{p}{k}\Delta t$. Densitatea evenimentelor înregistrate este deci p/k.

VIII.48. Fie ξ o variabilă aleatoare a cărei funcţie de repartiţie este $F(x)$. Să se arate că

$$M(H(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)dF(x)$$

pentru toate funcţiile boreliene $H(x)$ a căror valoare medie există.

R. Valoarea medie $E(H(\xi))$ nu depinde evident decît de distribuţia lui $H(\xi)$, deci de distribuţia lui ξ, deoarece, pentru toate mulţimile boreliene B

$$P(H(\xi) \in B) = P(\xi \in H^{-1}(B)),$$

unde $H^{-1}(B)$ este mulţimea tuturor valorilor reale x cu $H(x) \in B$. Deci $E(H(\xi))$ nu depinde de cîmpul de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$ pe care este definită variabila aleatoare ξ

considerăm atunci Ω axa reală, $\mathscr{X}$ mulțimea tuturor mulțimilor boreliene din Ω și P, măsura Lebesgue-Stieltjes definită prin

$$P(I_{ab}) = F(b) - F(a), \qquad a < b,$$

unde I_{ab} reprezintă un interval oarecare $a \leqslant x < b$. În aceste condiții $\xi(x) = x$ $(-\infty < x < +\infty)$ și

$$M(H(\xi)) = \int_{\Omega} H(\xi)\, \mathrm{d}P = \int_{+\infty}^{-\infty} H(x)\, \mathrm{d}F(x).$$

VIII.49. O încercare poate fi reușită cu probabilitatea p și nereușită cu probabilitatea $1 - p$. Probabilitatea condiționată de atingere a rezultatului propus după m încercări reușite este

$$P(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m, \quad \omega > 1.$$

Să se determine valoarea medie a numărului de încercări independente necesare pentru rezultatul propus.

R. Notăm cu $P_n(A)$ probabilitatea realizării rezultatului propus prin n încercări. Dacă $P_{n,m}$ este probabilitatea de a avea exact m încercări reușite din totalul de n încercări, atunci conform cu formula probabilității totale avem

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^{n} P_{n,m} \cdot P(m).$$

Încercările sînt independente și probabilitatea obținerii unui rezultat bun în fiecare încercare este p, atunci

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m\right] = 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^m.$$

Pentru realizarea rezultatului propus ne trebuie exact n încercări, dacă la a n — a încercare acesta va fi atins. Probabilitatea ultimului eveniment este $P_n(A) - P_{n-1}(A)$, deci valoarea medie a numărului aleator X de încercări necesare pentru realizarea rezultatului propus este

$$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n[P_n(A) - P_{n-1}(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} n\left[\left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{p}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} n\left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1}.$$

Utilizînd egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}, \ |x| < 1,$$

obţinem

$$M(X) = \frac{p}{\omega} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)\right]^2} = \frac{\omega}{p}.$$

VIII.50. Un dispozitiv are n siguranţe. În cazul suprasolicitărilor se arde o siguranţă şi este schimbată cu alta nouă. Să se determine valoarea medie a numărului de suprasolicitări N, după care în dispozitiv sînt schimbate toate siguranţele fixate iniţial, dacă ieşirea din aparat în momentul solicitării a uneia din cele n siguranţe este egal probabilă, (siguranţa neschimbată este considerată nouă).

R. Fie $E(N/k)$ valoarea medie a numărului de suprasolicitări după care toate cele n siguranţe fixate iniţial vor arăta schimbate, dacă au rămas neschimbate k siguranţe.

Dacă au rămas neschimbate k siguranţe ($k \geqslant 1$), atunci pentru deteriorarea uneia din ele, este nevoie de o suprasolicitare următoare. În funcţie de rezultatele suprasolicitării următoare vor fi diferite medii ale numărului de suprasolicitări necesare pentru arderea siguranţelor rămase din numărul celor fixate iniţial. Deci pentru suprasolicitarea următoare pot interveni două evenimente:

A_1 — a ars una din siguranţele fixate iniţial cu $P(A_1) = k/n$;

A_2 — a ars o siguranţă schimbată cu $P(A_2) = 1 - \frac{k}{n}$.

Dacă prin solicitarea următoare intervine A_1, atunci valoarea medie a numărului de solicitări pentru schimbarea tuturor celor k siguranţe neschimbate pînă la solicitarea următoare va fi

$$1 + M(N/k - 1).$$

Dacă prin solicitarea următoare intervine A_2, avem

$$1 + M(N/k).$$

În baza formulei valorii medii totale avem

$$M(N/k) = \frac{k}{n}\left\{1 + M(N/k - 1) + \left(1 - \frac{k}{n}\right)[1 + M(N/k)]\right\} =$$

$$= 1 + \frac{k}{n} M(N/k - 1) + \frac{n - k}{n} M(N/k)$$

şi după transformări simple

$$M(N/k) - M(N/k) - 1) = \frac{n}{k}.$$

Dacă $k = 1$, adică a rămas numai o siguranţă neschimbată, atunci probabilitatea schimbării ei este $1/n$, deci

$$M(N/1) = n.$$

Avem următorul şir de egalităţi:

$$M(N/n) - M(N/n-1) = \frac{n}{n},$$

$$M(N/n-1) - M(N/n-2) = \frac{n}{n-1},$$

. . . . . .

$$M(N/3) - M(N/2) = \frac{n}{3},$$

$$M(N/2) - M(N/1) = \frac{n}{2},$$

$$M(N/1) = n,$$

care prin sumare ne dau

$$M(N/n) = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \ldots + \frac{n}{2} + n$$

şi

$$M(N) = M(N/n) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

VIII.51. La explozia unui balon într-un proces de verificare a rezistenţei se formează 100 de cioburi care se distribuie în mod egal în conul de împrăştiere limitat de unghiurile de 30° şi 60° (fig. VIII.51.). Să se determine valoarea medie şi dispersia numărului de cioburi care se aşază pe 1 m² al părţii superficiale a sferei interioare conului de împrăştiere, dacă raza sferei este de 50 m, iar centrul ei coincide cu punctul exploziei.

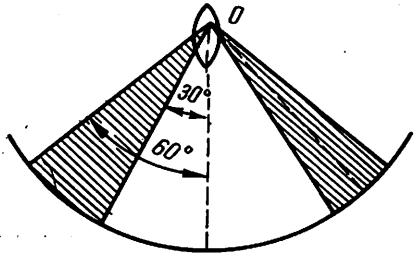


Fig. VIII.51

R. Intersectăm conul de împrăştiere a cioburilor cu sfera de rază 50 m şi determinăm valoarea medie a numărului de cioburi răspîndite pe unitatea de arie a zonei de la suprafaţa sferei. Notăm cu S aria zonei superficiale a sferei

$$S = 50^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\,500\pi(\sqrt{3} - 1) \approx 5\,725 \text{ m}^2.$$

Numărul total de cioburi este 100; atunci valoarea medie a numărului de cioburi răspîndite pe unitatea de arie a zonei superficiale a sferei va fi

$$a = \frac{N}{S} = \frac{100}{5\,725} = 0{,}01745 \text{ cioburi.}$$

Probabilitatea căderii unui ciob dat într-o arie dată $S_0 = 1$ m² este foarte mică: $\frac{S_0}{S} = 1{,}75 \cdot 10^{-4}$; de aceea putem presupune că numărul aleator de cioburi X care se răspîndeşte pe 1 m² al suprafeţei sferei este distribuit după legea Poisson şi deci

$$D^2(X) = M(X) = a = 0{,}01745.$$

VIII.52. Să se determine funcţia caracteristică şi momentele iniţiale ale variabilei aleatoare a cărei densitate de repartiţie este

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

R. Funcţia caracteristică a variabilei aleatoare ξ a cărei densitate de repartiţie este $f(x)$ se defineşte prin egalitatea

$$\varphi(t) = E(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) \, dx,$$

deci

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - |x|} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{(it-1)x} \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{(it+1)x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - it} - \frac{1}{1 + it} \right) = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Ştim că momentul iniţial de ordinul k, $k \in N$, al variabilei aleatoare ξ este

$$\alpha_k(\xi) = M(\xi^p) = \int_{\Omega} \xi^k(\omega) \, dP(\omega) = \int_R x^k \, dF(x)$$

și

$$\alpha_k(\xi) = \frac{\varphi_\xi^{(k)}(0)}{i^k}.$$

Avem

$$\left.\frac{d^k\varphi(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = \begin{cases} i^k k!, & \text{pentru } k \text{ par}, \\ 0, & \text{pentru } k \text{ impar}, \end{cases}$$

deci

$$\alpha_k(\xi) = \begin{cases} k!, & \text{pentru } k \text{ par}, \\ 0, & \text{pentru } k \text{ impar}. \end{cases}$$

VIII.53. Probabilitatea unui eveniment depinde de variabila X și se exprimă prin

$$P(A/x) = \begin{cases} 1 - e^{-kx}, & \text{pentru } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{pentru } x < 0, \end{cases} \quad (k > 0).$$

Să se determine probabilitatea totală a evenimentului A dacă X este o variabilă aleatoare distribuită normal cu valoarea medie $\bar{x}$ și dispersia σ^2.

R. Probabilitatea totală a evenimentului A este

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, P(A/x)\, dx,$$

unde

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

deci

$$P(A) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} (1 - e^{-kx})\, dx = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right)\right] -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} - kx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-k\left(\bar{x} - \frac{k\sigma^2}{2}\right)} \int_0^\infty e^{\frac{-(x-\bar{x}+k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + \Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right) - \left[1 + \Phi\left(\frac{\bar{x} - k\sigma^2}{\sigma}\right)\right] e^{-k\left(x - \frac{k\sigma^2}{2}\right)}\right\}.$$

VIII.54. Ca rezultat al verificărilor un obiect poate fi pus la prima calitate cu probabilitatea p_1 la calitatea a doua cu probabilitatea p_2, sau la rebuturi cu probabilitatea $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Se verifică n obiecte. Să se determine distribuţia diferitelor numere de obiecte din prima şi a doua calitate, valoarea lor medie, dispersia şi covarianţa.

R. Fie X şi Y numărul obiectelor din prima şi a doua calitate. Verificările sînt independente, deci probabilitatea ca k obiecte să se afle la prima calitate, s obiecte să fie la calitatea a doua iar $n - k - s$ obiecte rebutate este

$$P(X = k,\ Y = s) = \frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}\, p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s},$$

cu $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $(s, k = 0, 1, 2, \ldots n;\ s + k \leqslant n)$.

Valoarea medie şi dispersia numărului de obiecte din prima calitate sînt

$$M(X) = \bar{x} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}\, p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s} =$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \left[\sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}\, p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s} \right] =$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} (p_1 + p_2 + p_3) = np_1;$$

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{k^2 \cdot n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}\, p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s} - \bar{x}^2 =$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \left[\sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{k \cdot n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}\, p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s} \right] - \bar{x}^2 =$$

$$= p_1 \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} [np_1(p_1 + p_2 + p_3)^{n-1}] - \bar{x}^2 = np_1(1 - p_1).$$

Analog obţinem

$$M(Y) = np_2,\ D^2(Y) = np_2(1 - p_2).$$

Covarianţa între numărul obiectelor din prima categorie şi din categoria a doua este

$$M(XY) - M(X)\,E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} ks \frac{n!}{k!\,s!\,(x-k-s)}\, p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}\ \bar{x}\bar{y} =$$

$$= p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \cdot p_2 \frac{\partial}{\partial p_2} [(p_1 + p_2 + p_3)^n] - n^2 p_1 p_2 = p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} [np_1(p_1 + p_2 + p_3)^{n-1}] - n^2 p_1 p_2 =$$

$$= n(n-1)\, p_1 p_2 - n^2 p_1 p_2 = -np_1 p_2.$$

VIII.55. Fie (ξ, η) un punct uniform repartizat în domeniul din plan definit prin $|x^2 - y^2| \leqslant 1$. Să se determine densitatea condiţionată $f(x/y)$.

R. Densitatea lui (ξ, η) este

$$h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |x^2 - y^2| < 1, \\ 0, & |x^2 - y^2| \geqslant 1. \end{cases}$$

Densitatea de probabilitate $f(x)$ a lui ξ este dată de

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)\, dy.$$

Fie

$$f(x) = \begin{cases} 2(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}), & \text{pentru } |x| > 1 \\ 2\sqrt{x^2+1}, & |x| \leqslant 1. \end{cases}$$

Dacă $g(y)$ este densitatea lui η, atunci

$$g(y) = \begin{cases} 2(\sqrt{y^2+1} - \sqrt{y^2-1}), & \text{pentru } |y| > 1 \\ 2\sqrt{y^2+1}, & |y| \leqslant 1. \end{cases}$$

Rezultă

$$f(x/y) = \frac{h(x, y)}{g(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(\sqrt{y^2+1} - \sqrt{y^2-1})} & \text{pentru } |y| > 1,\ \sqrt{y^2-1} < |x| < \sqrt{y^2+1}, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y^2+1}}, & \text{pentru } |y| \leqslant 1,\ 0 \leqslant |x| < \sqrt{y^2+1}, \\ 0, & |x| < 0;\ |x| \geqslant \sqrt{y^2+1}. \end{cases}$$

VIII.56. Fie (ξ, η) o variabilă aleatoare bidimensională a cărei densitate de probabilitate este

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}.$$

1°. Să se determine densitățile de probabilitate ale componentelor.

2°. Să se determine densitățile condiționate $g_1(x/y)$ și $g_2(y/x)$.

R. Avem

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}\,dy = \sqrt{\frac{2}{5\pi}}\,e^{-\frac{4x^2}{10}},$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-2y^2}.$$

Rezultă

$$g_1(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_\eta(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{5(x+y)^2}{10}},$$

$$g_2(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_\xi(x)} = \frac{5}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x+5y)^2}{10}},$$

VIII.57. Să se determine valoarea medie a pătratului distanței dintre două puncte luate la întîmplare pe oricare din laturile unui dreptunghi.

R. Prin alegerea punctelor la întîmplare sînt posibile următoarele ipoteze incompatibile:

H_1: punctele sînt alese pe aceeași latură a;

H_2: punctele sînt alese pe aceeași latură b;

H_3: punctele sînt alese pe laturi alăturate ale dreptunghiului;

H_4: punctele sînt alese pe laturile opuse a;

H_5: punctele sînt alese pe laturile opuse b.

Avem

$$P(H_1) = 2\left(\frac{a}{2p}\cdot\frac{a}{2p}\right) = \frac{a^2}{2p^2}; \quad P(H_2) = \frac{b^2}{2p^2}; \quad P(H_3) = 2\frac{ab}{p^2};$$

$$P(H_4) = \frac{a^2}{2p^2}; \quad P(H_5) = \frac{b^2}{2p^2},$$

unde $2p$ este perimetrul dreptunghiului.

Vom determina valorile medii condiționate (vezi ipotezele H_i) ale pătratului distanței între două puncte:

$$M(d^2/H_1) = \int_0^a\int_0^a f(x, y)(x-y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^a (x-y)^2\,dx\,dy = \frac{a^2}{6};$$

$$M(d^2/H_2) = \frac{1}{b^2}\int_0^b\int_0^b (x-y)^2\,dx\,dy = \frac{b^2}{6};$$

$$M/(d^2/H_3) = \frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{3}(a^2+b^2);$$

$$M(d^2/H_4) = M[b^2 + (X-Y)^2] = b^2 + \frac{a^2}{6};$$

$$M(d^2/H_5) = a^2 + \frac{b^2}{6}.$$

Valoarea medie totală a variabilei aleatoare d^2 este

$$M(d^2) = \sum_{i=1}^{5} P(H_i)\,M(d^2/H_j) = \frac{1}{6p^2}(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) = \frac{(a+b)^4}{6p^2} = \frac{p^2}{6}.$$

VIII.58. Fiind dată matricea de corelație $\|\lambda_{rs}\|$ a unui sistem de 6 variabile aleatoare normale $X_1, X_2, \ldots, X_6$, ale căror valori medii sînt zero, să se determine valoarea medie a produsului $X_3^2X_2X_4$ utilizînd metoda funcțiilor caracteristice.

R. Valoarea medie $M(X_3^2X_2X_4)$ se determină cu ajutorul derivatei de ordinul al patrulea a funcției caracteristice

$$\varphi_{x_2,x_3,x_4}(l_2, l_3, l_4) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{4}\sum_{s=2}^{4}\lambda_{rs}l_rl_s};$$

$$M(X_3^2X_2X_4) = \left.\frac{\partial^4\varphi_{x_2,x_3,x_4}(l_2, l_3, l_4)}{\partial l_3^2\,\partial l_2\,\partial l_4}\right|_{l_2=l_3=l_4=0}.$$

Notăm $\tau_r = \sum_{s=1}^{n} \lambda_{rs} t_s$. Atunci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_3} = \frac{\partial}{\partial t_3}\left(e^{-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{6}\sum_{s=1}^{6}\lambda_{rs}t_r t_s}\right) = -\varphi\tau_3,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_3^2} = \varphi\tau_3^2 - \varphi\frac{\partial \tau_3}{\partial t_3} = \varphi\tau_3^2 - \varphi\lambda_{33},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_3^2 \partial t_2} = -\varphi\tau_3^2\tau_2 + 2\varphi\tau_3\lambda_{23} + \varphi\tau_2\lambda_{33},$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t_3^2 \partial t_2 \partial t_4} = \varphi\tau_3^2\tau_2\tau_4 - 2\varphi\tau_3\tau_2\lambda_{34} - \varphi\tau_3^2\lambda_{24} - 2\varphi\tau_3\tau_4\lambda_{23} +$$

$$+ 2\varphi\lambda_{34}\lambda_{23} - \varphi\tau_2\tau_4\lambda_{33} + \varphi\lambda_{24}\lambda_{33}.$$

Pentru $t_1 = t_2 = \ldots = t_6 = 0$ avem

$$\varphi = 1, \qquad \tau_r = 0,$$

prin urmare

$$M(X_3^2 X_2 X_4) = \lambda_{33}\lambda_{24} + 2\lambda_{23}\lambda_{34}.$$

VIII.59. Fie $\eta_n (n = 1, 2, \ldots)$ variabile aleatoare mărginite, $|\eta_n| \leqslant C$.

Condiția necesară și suficientă pentru ca η_n să conveargă în probabilitate la 0 este

$$\lim_{n\to\infty} M(|\eta_n|) = 0.$$

R. Aplicînd inegalitatea lui Markov variabilelor aleatoare (η_n), obținem

$$P(|\eta_n| > \varepsilon) \leqslant \frac{M(|\eta_n|)}{\varepsilon}.$$

Condiția dată este deci suficientă pentru ca $\eta_n \xrightarrow{P} 0$.

Presupunem acum că $\lim_{st}\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$, (convergență stochastică sau în probabilitate). Fie $A_n(\delta)$ evenimentul $|\eta_n| > \delta$, cu $\delta > 0$ arbitrar. Avem

$$M(|\eta_n|) = M(|\eta_n| / A_n(\delta))\, P(A_n(\delta)) + M(|\eta_n| / \overline{A_n(\delta)})\, P(\overline{A_n(\delta)}) \leqslant CP(A_n(\delta)) + \delta.$$

Prin ipoteză $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n(\delta)) = 0$, de unde

$$\limsup_{n\to\infty} M(|\eta_n|) \leqslant \delta.$$

Deoarece δ poate fi ales arbitrar de mic, condiția dată este necesară.

VIII.60. Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcţii continue pe intervalul închis $[0, 1]$ verificînd : $0 \leqslant f(x) < Cg(x)$, unde C este o constantă pozitivă. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_n)}\, dx_1 \dots dx_n = \frac{\int_0^1 f(x)\, dx}{\int_0^1 g(x)\, dx}.$$

R. Alegem în cubul-unitate din spaţiul cu n-dimensiuni un punct P la întîmplare (avînd repartiţia uniformă). Fie $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ coordonatele sale; $\xi_k (k = 1, \dots, n)$ sînt deci independente şi uniform distribuite în $[0, 1]$. Notăm

$$\eta_n = \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n}, \qquad \zeta_n = \frac{g(\xi_1) + g(\xi_2) + \dots + g(\xi_n)}{n}.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty}{}_{st}\, \eta_n = \int_0^1 f(x)\, dx, \qquad \lim_{n\to\infty}{}_{st}\, \zeta_n = \int_0^1 g(x)\, dx$$

şi, cum $\int_0^1 g(x)\, dx > 0$, avem

$$\lim_{n\to\infty}{}_{st} \frac{\eta_n}{\zeta_n} = \frac{\int_0^1 f(x)\, dx}{\int_0^1 g(x)\, dx}.$$

Dar $0 < \frac{\eta_n}{\zeta_n} < C$, se arată uşor că dacă un şir de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n\in N}$ converge stochastic la C şi $h(x)$ este o funcţie mărginită, măsurabilă Borel, continuă în C, atunci $\lim_{n\to\infty} M(h(\xi_n)) = f(C)$, deci

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{\eta_n}{\zeta_n}\right) = \frac{\int_0^1 f(x)\, dx}{\int_0^1 g(x)\, dx}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

VIII.61. Dacă $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sînt variabile aleatoare independente cu $M(\xi_n) = 0$, $D(\xi_n) = D_n$ şi dacă $\zeta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, avem pentru toţi $\varepsilon > 0$ şi $n = 1, 2, \dots$

$$P\left(\sup_{k\geqslant n} \left|\frac{\zeta_k}{k}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{D_k^2}{k^2}\right).$$

Această inegalitate este dată de J. Hájek.

R. Fie

$$\eta = \sum_{k=n}^{\infty} \zeta_k^2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right)$$

Atunci

$$M(\eta) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{D_k^2}{k^2}. \tag{1}$$

Fie $A_k (k \geqslant n)$, evenimentul care constă în aceea că inegalitățile

$$\frac{|\xi_m|}{m} < \varepsilon, \ (m = n, n+1, \ldots, k-1) \text{ și } \frac{|\zeta_k|}{k} \geqslant \varepsilon$$

sînt verificate; dacă $A = \sum_{k=n}^{\infty} A_k$, evenimentele $\overline{A}$, A_n, A_{n+1}, ... constituie un sistem complet. Deci

$$M(\eta) = M(\eta/\overline{A})\, P(\overline{A}) + \sum_{k=n}^{\infty} M(\eta/A_k)\, P(A_k) \tag{2}$$

și

$$M(\eta/A_k) = \sum_{m=n}^{\infty} M(\zeta_m^2/A_k) \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \geqslant \sum_{m=k}^{\infty} M(\zeta_m^2/A_k) \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} \right).$$

Dacă $m > k$ se arată, ca și la demonstrarea inegalității lui Kolmogorov, că

$$M(\zeta_m^2/A_k) \geqslant M(\zeta_k^2/A_k) \geqslant k^2 \varepsilon^2, \tag{4}$$

de unde

$$E(\eta/A_k) \geqslant \varepsilon^2$$

și

$$M(\eta) \geqslant \varepsilon^2 \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = \varepsilon^2 P\left(\sup_{k \geqslant n} \left| \frac{\zeta_k}{k} \right| \geqslant \varepsilon \right). \tag{5}$$

Din (1) și (5) obținem rezultatul căutat.

VIII.62. Fie η_n frecvența absolută a evenimentului A într-un șir de n experiențe independente, $P(A) = p, (0 < p < 1; q = 1 - p)$. Să se demonstreze teorema logaritmului iterat:

$$P\left(\limsup_{n \to \infty} \frac{\eta_n - np}{\sqrt{2npq \ln \ln n}} = 1 \right) = 1 \tag{1}$$

și

$$P\left(\liminf_{n \to \infty} \frac{\eta_n - np}{\sqrt{2npq \ln \ln n}} = -1 \right) = 1. \tag{2}$$

R. La demonstrarea teoremei Moivre-Laplace se arată că

$$P\left(\frac{\eta_n - np}{\sqrt{npq}} > x\right) = 1 - \Phi(x) + o\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\right)$$

pentru $x = o(\sqrt{\ln \ln n})$, de unde

$$P\left(\frac{\eta_n - np}{\sqrt{2npq \ln \ln n}} \geqslant 1 - \varepsilon\right) = 1 - \Phi(1 - \varepsilon)\sqrt{2 \ln \ln n}) + o\left(\frac{(\ln \ln n)^{3/2}}{\sqrt{n}}\right).$$

Dar

$$1 - \Phi(x) > \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

rezultă că

$$P\left(\frac{\eta_n - np}{\sqrt{2npq \ln \ln n}} \geqslant 1 - \varepsilon\right) \geqslant \frac{c}{\ln n}, \text{ pentru } n \geqslant n_0,$$

$c > 0$ fiind o constantă. Fie $\eta_k = 2^k$ şi A_k evenimentul

$$\frac{\eta n_k - n_k p}{\sqrt{2n_k pq \ln \ln n_k}} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Seria $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ este deci divergentă şi

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} P(A_k A_l)}{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2} = 1,$$

deci cu probabilitatea 1 se produc o infinitate de evenimente A_k (lema lui Borel-Cantelli). Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar de mic, (1) este demonstrat. Analog se demonstrează şi (2).

VIII.63. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ variabile aleatoare independente două cîte două, avînd aceeaşi repartiţie $F(x)$. Notînd $\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$ să se arate că pentru a avea $\lim_{n \to \infty}{}_{st}\, \zeta_n = 0$ condiţiile următoare :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} x \mathrm{d}F(x) = 0; \tag{1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} xF(x) = \lim_{x \to +\infty} x[1 - F(x)] = 0 \tag{2}$$

sînt suficiente.

R. Fie

$$\xi_{n_k} = \begin{cases} \xi_k, & |\xi_k| \leqslant n, \\ 0, & |\xi_k| > n \end{cases}$$

şi

$$\zeta_n^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_{n_k}.$$

Atunci

$$P(\zeta_n \neq \zeta_n^*) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(|\xi_k| > n) = n[F(-n) + (1 - F(n))]$$

şi din (2)

$$\lim_{n\to\infty} P(\zeta_n \neq \zeta_n^*) = 0.$$

Este suficient deci de arătat că $\lim_{st} \zeta_n^* = 0$: deoarece

$$P(|\zeta_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|\zeta_n^*| \geqslant \varepsilon) + P(\zeta_n \neq \zeta_n^*)$$

şi deci $\lim_{st} \zeta_n = 0$. Pe de altă parte din (1) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} M(\zeta_n^*) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x \mathrm{d}F(x) = 0.$$

Mai mult

$$D^2(\zeta_n^*) \leqslant \frac{1}{n} \int_{-n}^{n} x^2 \mathrm{d}F(x) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 \int_{k-1}^{k} \mathrm{d}F(x) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 \int_{-k}^{-(k-1)} \mathrm{d}F(x).$$

Introducînd notaţia $a_k = 1 - F(k)$, $b_k = F(-k)$, putem scrie

$$D^2(\zeta_n^*) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k[(a_{k-1} - a_k) + (b_{k-1} - b_k)] \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + b_k)(2k+1)$$

şi după (2)

$$\lim_{k\to\infty} (2k+1)(a_k + b_k) = 0,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} D^2(\zeta_n^*) = 0,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n^* = 0.$$

VIII.64. O urnă conține a bile albe și b bile negre. Se fac n extracții în felul următor: se extrage din urnă cîte o bilă și se introduc apoi în urnă c bile de culoarea bilei extrase. Fie ξ_k variabila aleatoare care ia valoarea 0 sau 1 după cum în extracția de rang k s-a obținut o bilă albă sau neagră și $X_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_\nu$.

1°. Să se calculeze $P(\xi_1 = 0 \mid \xi_2 = 0)$ și $P(\xi_n = 1)$.

2°. Pentru $m < n$ să se determine legea de probabilitate a cuplului (ξ_m, ξ_n) și să se calculeze coeficientul de corelație $\rho(\xi_m, \xi_n)$.

3°. Să se calculeze $M(X_\nu)$ și $\sigma^2(X_\nu)$.

4°. Să se studieze convergența în probabilitate a seriei $\left(\frac{X_n}{n}\right)$.

R. Avem

$$P(\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0) = P(\xi_1 = 0),\ P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0) = p\,\frac{a+c}{a+b+c},\ p = \frac{a}{a+b};$$

$$P(\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0) = q\,\frac{a}{a+b+c},\ q = \frac{b}{a+b};$$

$$P(\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1) = p\,\frac{a}{a+b+c},\ P(\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 1) = q\,\frac{b+c}{a+b+c},$$

de unde

$$P(\xi_2 = 0) = P(\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0) = \frac{p(a+c) + aq}{a+b+c} = p,$$

$$P(\xi_2 = 1) = q.$$

Dar $P(\xi_1 = 0) = p$, deci

$$P(\xi_1 = 0 \mid \xi_2 = 0) = \frac{P(\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0)}{P(\xi_2 = 0)} = P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0) = \frac{a+c}{a+b+c}$$

Deci egalitatea

$P(\xi_1 = 0 \mid \xi_2 = 0) = P(\xi_2 = 0 \mid \xi_1 = 0)$, rezultă că legea cuplului (ξ_1, ξ_2) este simetrică.

Pentru calculul probabilității $P(\xi_2 = 0)$ vom face extracția a n-a ținînd seama de valoarea variabilei X_{n-1}.

Dacă $X_{n-1} = k$, urna conține $a + b + (n-1)c$ bile din care $a + (n-k-1)c$ albe și $b + ck$ negre, deci

$$P(\xi_n = 0 \mid X_{n-1} = k) = \frac{a + (n-1-k)c}{a+b+(n-1)c},\ P(\xi_n = 1 \mid X_{n-1} = k) = \frac{b+kc}{a+b+(n-1)c}$$

și

$$P(\xi_n = 1) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_n = 1,\ X_{n-1} = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+ck}{a+b+(n-1)c} P(X_{n-1} = k) =$$

$$= \frac{1}{a+b+(n-1)c}\left(b + c\sum_{k=0}^{n-1} kP(X_{n-1} = k)\right) = \frac{1}{a+b+(n-1)c}\,[b + cM(X_{n-1})].$$

Variabilele ξ_1 şi ξ_2 au aceeaşi lege de probabilitate. Presupunînd că ξ_ν are aceeaşi lege cu ξ_1, pentru $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, deci $M(X_{n-1}) = (n-1)q$, rezultă

$$P(\xi_n = 1) = \frac{b + c(n-1)q}{a + b + (n-1)c} = q.$$

2° Vom presupune că, cuplul (ξ_m, ξ_n) urmează aceeaşi lege de probabilitate cu (ξ_1, ξ_2) dacă $m < n \leqslant N$ şi vom demonstra aceasta şi pentru $m < n \leqslant N + 1$.

$$P(\xi_n = 0,\ \xi_{N+1} = 0) = \sum_{k=0}^{N} P(\xi_n = 0,\ \xi_{N+1} = 0,\ X_N = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} P(\xi_n = 0,\ X_N = k)\ P(\xi_{N+1} = 0 \mid \xi_n = 0,\ X_N = k).$$

Dacă $X_N = k$, după N extrageri urna conţine $a + (N-k)c$ bile albe şi $b + kc$ bile negre, deci probabilităţile de a extrage o bilă albă, respectiv neagră sînt respectiv

$$\frac{a + (N-1)c}{a + b + N_c}, \qquad \frac{b + ck}{a + b + N_c}$$

şi

$$P(\xi_n = 0,\ \xi_{N+1} = 0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{a + (N-k)c}{a + b + N_c} P(\xi_n = 0,\ X_N = k) =$$

$$= \frac{a + N_c}{a + b + N_c} \sum_{k=0}^{N} P(\xi_n = 0,\ X_N = k) - \frac{c}{a + b + N_c} \sum_{k=0}^{N} k P(\xi_n = 0,\ X_N = k) =$$

$$= \frac{a + N_c}{a + b + N_c} P(\xi_n = 0) - \frac{c}{a + b + N_c} \sum_{k=0}^{N} k P(\xi_n = 0) P(X_N = k) \mid \xi_n = 0) =$$

$$= \frac{a + N_c}{a + b + N_c} p - \frac{c}{a + b + N_c} p M(X_N \mid \xi_n = 0).$$

$$M(X_N \mid \xi_n = 0) = \sum_{\nu=1}^{N} M(\xi_\nu \mid \xi_n = 0) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^{N} P(\xi_\nu = 1 \mid \xi_n = 0) = \frac{(N-1)b}{a + b + c}$$

și

$P(\xi_n = 0,\ \xi_{N+1} = 0) = \dfrac{(a+c)p}{a+b+c}$, deci cuplurile (ξ_1, ξ_2) și (ξ_n, ξ_{N+1}) au aceeași lege de probabilitate, deci $n \,!\, | \,(\xi_n, \xi_m)$, $(m < n)$.

Avem

$$\rho(\xi_m, \xi_n) = \rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{M(\xi_1\xi_2) - M(\xi_1)M(\xi_2)}{\sigma(\xi_1)\sigma(\xi_2)},$$

$$M(\xi_1 \xi_2) = P(\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 1) = q\,\frac{b+c}{a+b+c}$$

și

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{c}{a+b+c}.$$

3°. $M(X_\nu) = \nu q$,

$$M(X_\nu^2) = M((\xi_1 + \ldots + \xi_\nu)^2) = \nu M(\xi_1^2) + 2C_\nu^2 M(\xi_1\xi_2) =$$

$$= \nu q + \nu(\nu - 1)q\,\frac{b+c}{a+b+c},$$

$$\sigma^2(X_\nu) = M(X_\nu^2) - M^2(X_\nu) = \frac{\nu ab(a+b+\nu c)}{(a+b)^2(a+b+c)}.$$

4°. Avem

$$0 \leqslant \frac{X_n}{n} < 1,$$

deci convergența în probabilitate a lui $\dfrac{X_n}{n}$ este echivalentă cu convergența în medie pătratică.

Presupunînd $m < n$,

$$M\left(\left(\frac{X_n}{n} - \frac{X_m}{m}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)q + \left[2 + 3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) - 2\frac{m}{n}\right]q\,\frac{b+c}{a+b+c}$$

și

$M\left(\left(\dfrac{X_n}{n} - \dfrac{X_m}{m}\right)^2\right) \to 0$ pentru $m, n \to \infty$ deci șirul $\dfrac{X_n}{n}$ nu este Cauchy în medie pătratică, deci nu este convergent în probabilitate.

VIII.65. Să se cerceteze dacă integrala $I = \displaystyle\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, $(a > 0)$, după schimbarea de variabilă $y = \dfrac{a}{x}$ se poate calcula prin metoda Monte Carlo după formula

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{n} \frac{1}{y_k}\sin\frac{a}{y_k},$$

unde y_k sînt numere aleatoare din intervalul [0, 1].

R. După schimbarea de variabilă indicată obţinem

$$I = \int_0^1 \frac{1}{y} \sin \frac{a}{y} \, dy.$$

Mărimea I_n poate fi socotită apropiată de valoarea I numai atunci cînd

$$\lim_{n \to \infty} P(|I_n - I| < \varepsilon) = 1.$$

Numerele aleatoare y_k au repartiţii unice şi deci şi funcţiile lor $\frac{1}{y_k} \sin \frac{a}{y_k}$ au repartiţii unice.

Pentru aplicarea teoremei lui Hincin rămîne să ne convingem de existenţa valorii medii $M\left[\frac{1}{Y} \sin \frac{a}{Y}\right]$, unde Y este o variabilă aleatoare uniform distribuită în [0,1], deci trebuie să arătăm că $\int_0^1 \frac{1}{y} \sin \frac{a}{y} \, dy$ este absolut convergentă.

Dacă notăm prin s cel mai mic număr întreg cu $s \geqslant \frac{a}{\pi}$, atunci

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{y} \sin \frac{a}{y} \right| dy = \int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x} \, dx \geqslant \sum_{k=s}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \, dx = \sum_{k=s}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin y}{y + k\pi} \, dy.$$

Dar

$$\sum_{k=s}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin y}{y + k\pi} \, dy > \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{\pi(k+1)} \int_0^\pi \sin y \, dy = \frac{2}{\pi} \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty, \text{ deci}$$

integrala este divergentă şi $M\left[\frac{1}{Y} \sin \frac{a}{Y}\right]$ nu există, deci metoda Monte Carlo nu se aplică

VIII.66. Să se cerceteze dacă mărimea

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a)^2$$

poate fi luată ca valoare aproximativă a dispersiei greşelilor de verificare a unui aparat, dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt măsurători independente ale mărimii constante a, care au aceeaşi funcţie de repartiţie.

R. Fie σ^2 valoarea exactă a dispersiei erorilor de verificare a aparatului. Mărimea S_n^2 poate fi privită ca valoare aproximativă a lui σ^2 dacă

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n^2 - \sigma^2| < \varepsilon) = 1.$$

Variabilele aleatoare $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sînt independente iar mărimile $\eta_k = (\xi_k - a)^2$ sînt şi ele independente. Avem

$$M(\eta_k) = M((\xi_k - a)^2) = M(\xi_k^2) - 2aM(\xi_k) + a^2 =$$

$$= \sigma^2 + \bar{\xi}_k^2 - 2a\bar{\xi}_k + a^2 = \sigma^2 + (\bar{\xi}_k - a)^2, \quad \bar{\xi}_k = M(\xi_k).$$

Pentru a avea $E(\eta_k) = \sigma^2$, este necesar ca $\bar{\xi}_k = a$, ceea ce înseamnă lipsa greşelilor sistematice de măsurare. Deci numai dacă nu avem greşeli sistematice, putem aplica legea numerelor mari şi prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)^2 - \sigma^2\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

VIII.67. Cîte încercări sînt necesare pentru evaluarea integralei

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

prin metoda Monte Carlo pentru ca în calculul integralei să avem cu probabilitatea 0,9 o eroare relativă mai mică de 5%?

R. Integrala

$$\frac{\pi}{2} I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

poate fi considerată ca valoarea medie a funcţiei $\cos x$ în raport cu variabila aleatoare ξ uniform repartizată în $(0, \pi/2)$. Atunci valoarea aproximativă a integralei este

$$I_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \cos \xi_k,$$

unde ξ_k este un număr aleator în $(0, \pi/2)$. Formăm variabila aleatoare

$$T_n = \frac{I_n - I}{\sqrt{D[I_n]}}$$

care are la limită, ca lege de repartiţie, conform teoremei lui Leapunov

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Deci mărimile cos ξ_k sînt independente, au aceeaşi repartiţie, cu $I = M[I_n]$ şi

$$D^2[I_n] = \frac{\pi^2}{4n} D^2[\cos \xi] = \frac{\pi^2 - 8}{8n}.$$

Teorema lui Leapunov ne dă

$$P\left(\sqrt{\frac{8n}{\pi^2 - 8}} \, | I_n - I | < \varepsilon\right) \approx \Phi(\varepsilon) = 0{,}9;$$

aici $\varepsilon = 1{,}645$.

Pentru ca eroarea $\frac{I_n - I}{I}$ să fie mai mică decît 0,05, considerînd că $I = 1$, este necesar să facem un număr n de încercări, astfel încît

$$\sqrt{\frac{8n}{\pi^2 - 8}} \cdot 0{,}05 > 1{,}645, \text{ de unde } n > 252.$$

VIII.68. Să se stabilească relaţiile:

1. $H(AB) = H(A) + H_A(B)$;
2. $H_A(B) \leqslant H(B)$,

oricare ar fi cîmpurile de evenimente A, B, C.

R. Fie A un cîmp finit de evenimente cu desfacerea $A_1, \ldots, A_n$ şi probabilităţile corespunzătoare $P(A_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$. Mărimea $H(A)$ se numeşte *entropia* cîmpului A şi ea constituie o măsură a nedeterminării sau o cantitate de informaţie conţinută în A şi este definită astfel:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \log_2 P(A_i).$$

Avem

$$H(AB) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(A_i B_j) \log_2 P(A_i B_j),$$

unde B este un cîmp finit de evenimente şi are o desfacere $B_1, B_2, \ldots, B_m$.

Entropia condiţionată a cîmpului B, în ipoteza că în cîmpul A a avut loc evenimentul A_i, este

$$H_{A_i}(B) = -\sum_{k=1}^{m} P_{A_i}(B_k) \log_2 P_{A_i}(B_k),$$

Valoarea medie a variabilei aleatoare $H_{A_i}(B)$ este

$$H_A(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)H_{A_i}(B)$$

şi se numeşte *entropia* cîmpului B *condiţionată* de cîmpul A.

1. Să presupunem că A şi B sînt independente. Avem

$$-H(AB) = \sum_{i,k} P(A_iB_k)\log_2 P(A_iB_k) = \sum_{i,k} P(A_i)P(B_k)\,[\log_2 P(A_i) + \log_2 P(B_k)] =$$

$$= \sum_k P(B_k) \sum_i P(A_i)\log_2 P(A_i) + \sum_i P(A_i) \sum_k P(B_k)\log_2 P(B_k) = -H(A) - H(B).$$

Dacă cîmpurile nu sînt independente, $P(A_iB_k) = P(A_i)P_{A_i}(B_k)$ şi deci

$$-H(AB) = \sum_{i,k} P(A_i)P_{A_i}(B_k)\,[\log_2 P(A_i) + \log_2 P_{A_i}(B_k)] =$$

$$= \sum_k P_{A_i}(B_k) \sum_i P(A_i)\log_2 P(A_i) + \sum_i P(A_i) \sum_k P_{A_i}(B_k)\log_2 P_{A_i}(B_k) =$$

$$= -H(A) - H_A(B).$$

2. Considerăm funcţia convexă pentru $x > 0$.

$$f(x) = x\log_2 x.$$

Atunci pentru orice $x_i > 0$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, avem

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right). \qquad (*)$$

Scriem inegalitatea (2) sub forma

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \sum_{k=1}^{m} P_{A_i}(B_k)\log_2 P_{A_i}(B_h) \geqslant \sum_{k=1}^{m} P(B_k)\log_2 P(B_k).$$

Luăm $\lambda_i = P(A_i)$ şi $x_i = P_{A_i}(B_k)$ în (*). Rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \sum_{k=1}^{m} P_{A_i}(B_k)\log_2 P_{A_i}(B_k) = \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} P(A_i)f(P_{A_i}(B_k))\right] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{m} f\left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B_k)\right) = \sum_{k=1}^{m} f(P(B_k)) = \sum_{k=1}^{m} P(B_k)\log_2 P(B_k),$$

deoarece $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, $\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B_k) = P(B_k)$.

Deci

$$H_A(B) \leqslant H(B).$$

VIII.69. Se codifică prin metoda Sennon-Feno alfabetul compus din 4 simboluri A, B, C, D dacă probabilităţile apariţiei fiecărui simbol într-o comunicare sînt

$$P(A) = 0{,}28\,; \qquad P(B) = 0{,}14\,; \qquad P(C) = 0{,}48\,; \qquad P(D) = 0{,}10.$$

Să se determine cantitatea de informaţie care corespunde la un simbol

R. Dispunem simbolurile alfabetului în ordinea descreşterii probabilităţilor lor şi aranjăm pe grupe diviziunile logice.

În prima diviziune din prima grupă intră C, iar în a doua A, B şi D, deoarece $P(C) = 0{,}48$ şi $P(A + B + D) = 0{,}12$.

Primei grupe îi adăugăm simbolul codificat V, iar grupei a doua 0. Analog, din grupa a doua obţinem subgrupurile A şi $B + D$ cu probabilităţile 0,28 şi 0,24 şi însemnările codificate 01 şi 00. În sfîrşit grupa $B + D$ se descompune în B şi D cu probabilităţile 0,14 şi 0,10 şi simbolurile codificate 001 şi 000.

Reprezentăm astfel procesul codificării:

Simbolurile alfabetului	Probabilităţile simbolurilor alfabetului	Subgrupele şi simbolurile lor codificate	Însemnările codificate ale simbolurilor alfabetului
C	0,48	1	1
A	0,28	0 1	01
B	0,14	0 0 1	001
D	0,10	0	000

La apariţia unuia din simbolurile alfabetului corespunde o grupă întreagă de evenimente incompatibile şi în general cantitatea de informaţie în exemplul dat este egală cu entropia alfabetului. De aceea cantitatea de informaţie care corespunde la un simbol codficat (economia de cod) este egală cu raportul dintre entropia alfabetului şi valoarea medie a lungimii însemnărilor codificate a simbolurilor alfabetului

$$\frac{-0{,}48\cdot\log_2 0{,}48 - 0{,}28\cdot\log_2 0{,}28 - 0{,}14\cdot\log_2 0{,}14 - 0{,}10\cdot\log_2 0{,}10}{1\cdot 0{,}48 + 2\cdot 0{,}28 + 3\cdot 0{,}14 + 3\cdot 0{,}10} = \frac{1{,}751}{1{,}760} = 0{,}995.$$

VIII.70. Dintre toate legile de repartiţie continue a unei variabile aleatoare pentru care este dată aceaşi dispersie D^2, să se determine legea de repartiţie cu entropia diferenţială maximă.

R. Conform unei teoreme a calculului variaţional pentru determinarea funcţiei $y = y(x)$ care dă extremumul integralei

$$I = \int_a^b \Phi(x, y)\,\mathrm{d}x$$

cu condiţiile suplimentare

$$\int_a^b \Psi_s(x, y)\mathrm{d}x = c_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots, m),$$

este necesar să rezolvăm ecuaţia lui Euler

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0,$$

unde $\Phi_1 = \Phi + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \Psi_s$, iar constantele λ_s se determină cu ajutorul condiţiilor suplimentare date. În exemplul nostru trebuie să aflăm maximul integralei

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x)\mathrm{d}x$$

cu condiţiile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)\mathrm{d}x = D^2.$$

De aici

$$\Phi_1(x, f) = -f \ln f + \lambda_1 f + \lambda_2 (x - \bar{x})^2 f.$$

Prin urmare, ecuaţia pentru determinarea funcţiei $f(x)$ este

$$-\ln f(x) - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2 (x - \bar{x})^2 = 0,$$

de unde

$$f(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda_2 (x - \bar{x})^2}, \qquad C = \mathrm{e}^{-\lambda_1 + 1}.$$

Din condiţiile suplimentare găsim

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi D^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2D^2}.$$

Rezultatul găsit corespunde entropiei maxime, care are o lege de repartiţie

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, D} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2D^2}(x - \bar{x})^2}.$$

Capitolul IX

STATISTICĂ MATEMATICĂ

Statistica matematică, ramură a matematicii aplicate se ocupă cu gruparea, analiza şi interpretarea datelor referitoare la un anumit fenomen de masă, în scopul obţinerii unor previziuni privind comportarea sa ulterioară. Metodele statisticii sînt folosite pentru a trage concluzii asupra unei populaţii pe baza selecţiei. Deoarece numai în cazuri excepţionale se pot face presupuneri asupra populaţiei, acestea trebuie exprimate în limbaj probabilistic. Utilizarea calculului probabilităţilor presupune ca selecţia să fie aleatoare (orice selecţie posibilă să aibă o şansă de a fi aleasă).

Definiţie. O selecţie de volum n este o realizare a vectorului aleator $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ şi o vom nota prin $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Pe baza unei selecţii, se face o estimaţie asupra caracteristicilor populaţiei generale. Dată repartiţia statistică

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_k \\ n_1, & n_2, & \ldots, & n_k \end{pmatrix}$$

valoarea medie de selecţie este

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}, \tag{1}$$

unde x_i sînt valorile distincte care apar în urma selecţiei;

n_i — frecvenţa valorilor x_i;

n — volumul selecţiei:

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

şi reprezintă mărimea aproximativă a mediei colectivităţii generale.

Dispersia de selecţie este

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2 \tag{2}$$

şi reprezintă o mărime aproximativă a dispersiei colectivităţii generale.

În practică pentru calculul valorii medii şi a dispersiei se pot folosi unele artificii care scurtează calculele : printr-o alegere potrivită a valorii x_0 avem

$$\bar{x} = x_0 + \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_0) f_i, \tag{3}$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_0)^2 f_i - (\bar{x} - x_0), \; f_i = \text{frecvenţe relative.}$$

Definiţie. Numim *mod* al unei serii statistice (repartiţie empirică a caracteristicii respective) valoarea caracteristicii căreia îi corespunde cea mai mare frecvenţă. *Mediana* unei serii statistice este valoarea caracteristicii care împarte volumul populaţiei în două părţi egale.

Momentul de ordinul p este

$$m_p = \frac{\sum n_i x_i^p}{\sum n_i},$$

iar *momentul centrat* (momente faţă de media aritmetică luată drept origine) $\bar{m}_p$ se obţin pe cale aritmetică din momentele calculate faţă de originea arbitrară. Avem

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 &= 0, \\ \bar{m}_2 &= m_2 - m_1^2, \\ \bar{m}_3 &= m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3, \\ \bar{m}_4 &= m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4. \end{aligned} \tag{4}$$

În cazul în care momentele se calculează din date grupate pentru înlăturarea erorilor ce apar din presupunerea că elementele fiecărui

interval sînt grupate în centrul intervalului, se folosește corecția Sheppard. Momentele astfel centrate sînt :

$$
\begin{aligned}
m_1^* &= 0, \\
m_2^* &= \overline{m}_2 - \frac{1}{12}, \\
m_3^* &= \overline{m}_3, \\
m_4^* &= \overline{m}_4 - \frac{\overline{m}_2}{2} + \frac{7}{240}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o selecție dintr-o repartiție specificată (exprimată printr-o funcție în care toți parametrii sînt cunoscuți).

Există o infinitate de statistici (funcții de $x_1, \ldots, x_n$) care pot fi luate drept valori ale parametrilor necunoscuți. Dintre acestea trebuie alese cele mai bune, care se apropie cel mai mult de valorile adevărate ale parametrilor necunoscuți. Deci o estimație va fi cu atît mai bună cu cît repartiția se concentrează mai puternic în jurul valorii adevărate a parametrului.

Fie θ un parametru al colectivității generale (medie, mediană, dispersie,...) și U_n o funcție reală măsurabilă Borel definită pe mulțimea valorilor de selecție.

Definiție. Dacă $U_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \theta$ spunem că U_n este o estimație *consistentă* a parametrului θ. Dacă

$$M[U_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} D^2[U_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = 0,$$

spunem că $U_n(x_1, \ldots, x_n)$ este o estimație absolut corectă a parametrului θ.

Momentele de selecție sînt estimații absolut corecte ale momentelor teoretice, iar s^2 este o estimație *consistentă* pentru dispersie.

O estimație consistentă absolut corectă pentru dispersie este

$$s'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i n_i (x_i - \bar{x})^2. \tag{6}$$

Definiţie. O estimaţie absolut corectă $U_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a parametrului θ se numeşte *eficientă* dacă are dispersia minimă.

Fie o repartiţie de tip continuu cu densitatea $f(x, \theta)$,unde θ poate avea orice valoare într-un interval I. Valorile de selecţie x_1, $x_2, \ldots, x_n$ obţinute în urma a n extrageri independente din populaţie sînt variabile aleatoare independente cu densitatea de repartiţie $f(x, \theta)$. Fiecare $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ este un punct din spaţiul de selecţie şi probabilitatea elementară a vectorului $(x_1, \ldots, x_n)$ este

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Definiţie. Funcţia $P: R^n \times I \to R$ se numeşte *funcţie de verosimilitate*, iar estimaţia $\hat{t}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numeşte *estimaţie de verosimilitate maximă* dacă t_n este un punct de maxim pentru funcţia de verosimilitate. Ecuaţia

$$\frac{\partial \ln P(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0, \tag{7}$$

se numeşte *ecuaţie de verosimilitate*.

Teoremă. Orice estimaţie eficientă a parametrului θ este o estimaţie de verosimilitate maximă.

Regiuni de încredere. Fie dată o densitate de repartiţie $f(x, \theta)$ în care intră un parametru necunoscut, θ. Dacă efectuînd o selecţie de volum n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, există două statistici $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aşa încît

$$P[A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \theta \leqslant B(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \beta,$$

unde β nu depinde de θ şi este apropiat de 1, înseamnă că inegalitatea

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \theta \leqslant B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

este îndeplinită, în majoritatea cazurilor, iar θ deşi necunoscut are o valoare bine determinată în intervalul $[A, B]$ numit *interval de încredere*, iar β — *prag de încredere*.

Pentru estimarea valorii medii, a, a caracteristicii cantitative X, normal distribuită, cunoscînd media de selecţie $\bar{x}$ şi abaterea medie pătratică a populaţiei generale, intervalul de încredere este

$$\bar{x} - t_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{8}$$

unde $t_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \gamma$ este precizia estimației. Valoarea lui t_β se calculează din egalitatea $\Phi^*(t) = \frac{\beta}{2}$, $\Phi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-t^2/2}\,dt$; iar dacă nu se cunoaște σ (și $n<30$) avem intervalul de încredere.

$$\bar{x} - t_\beta \frac{s'}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\beta \frac{s'}{\sqrt{n}}, \quad s' = \sqrt{s'^2}. \tag{9}$$

Pentru estimarea lui σ al caracteristicii cantitative X, normal distribuită cu probabilitatea β, cunoscînd dispersia de selecție s'^2, construim intervalele de încredere astfel:

$$\begin{gathered} s'(1-q) < \sigma < s'(1+q), \text{ dacă } q<1 \\ 0 < \sigma < s'(1+q), \text{ dacă } q>1 \end{gathered} \tag{10}$$

valorile lui q fiind date de anexa 7.

Numim *ipoteză statistică* orice presupunere privind repartiția necunoscută a unei variabile aleatoare. Ipoteza prezentată H_0 o vom numi ipoteză nulă, iar ipoteza H_1, care contrazice ipoteza H_0, o vom numi alternativă.

Metodele de verificare a ipotezelor statistice se numesc *teste statistice.*

Fie $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1$.

Rezultatul verificării ipotezelor poate conduce la erori de două tipuri:

1° erori de primul tip, dacă se respinge o ipoteză adevărată. Probabilitatea acestei erori este α și se numește *prag de semnificație* al testului;

2° eroare de ordinul doi, dacă se admite o ipoteză falsă.

Se verifică ipoteza H_0 cu ajutorul valorii observate a unei statistici u (funcție de observații). Dacă se notează cu V mulțimea valorilor statisticii u astfel încît dacă ipoteza H_0 este adevărată $P(u \in V) = \alpha$. Mulțimii V îi corespunde în spațiul de selecție o mulțime W așa încît

$$P(X \in W) | H_0) = \alpha, \tag{11}$$

cu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Mulțimea W este numită regiune critică. Dacă $X \in W$, respingem ipoteza H_0 (acceptăm H_1), iar dacă $X \in W^c$ acceptăm ipoteza H_0.

Mulţimea W^c este numită *regiune de acceptare.*

Punctele care separă regiunea critică de regiunea de acceptare le vom numi puncte critice (notate spre exemplu) χ^2_{cr}).

Facem o eroare de ordinul doi dacă $X \notin W$ deşi $\theta = \theta_1$. Fie

$$P(X \in W^c \mid \theta_1) = \beta. \tag{12}$$

Probabilitatea de respingere a ipotezei H_0, ca funcţie de θ, poartă numele de *funcţie de putere a testului*, $\pi(W, \theta)$. Avem

$$\pi(W, \theta) = P(X \in W \mid \theta), \ \pi(W, \theta_0) = \alpha, \ \pi(W, \theta_1) = 1 - \beta.$$

În controlul statistic al calităţii produselor, α se numeşte *riscul furnizorului* iar β — *riscul beneficiarului.*

În general se pot găsi mai multe submulţimi W ale spaţiului de selecţie, toate satisfăcînd (11). Dintre acestea alegem ca bază a testului o mulţime W (dacă există), pentru care (12) are o valoare minimă. O astfel de mulţime este numită *cea mai bună regiune critică*, iar testul bazat pe ea, *cel mai puternic test* [1].

PROBLEME

XI.1. Repartiţia valorilor unei variabile observate pe baza a 50 observaţii este dată de tabelul următor:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	3	8	5	10	8	6	7	3

Să se calculeze:

1°. Valoarea medie a mărimii observate, dispersia şi coeficientul de variabilitate.

2°. Să se determine moda variabilei.

3°. Să se scrie funcţia empirică de repartiţie.

---

[1]) Pentru diversele teste aplicate vezi [45].

R. 1. Redăm calculele în tabelul următor:

n_i	Frecvenţe cumulate	x_i	$x_i - x_0$	$n_i(x_i - x_0)$	$n_i(x_i - x_0)^2$
3	3	0	−3	− 9	27
8	11	1	−2	−16	32
5	16	2	−1	− 5	5
10	26	$x_0 - 3$	0	0	0
8	34	4	1	8	8
6	40	5	2	12	24
7	47	6	3	21	63
3	50	7	4	12	48
50				23	207

Valoarea medie este

$$\bar{x} = 3 + \frac{23}{50} = 3{,}46,$$

iar dispersia

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_0)^2 n_i}{N} - (\bar{x} - x_0)^2 = 3{,}93.$$

Coeficientul de variabilitate $V = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} 100$ este

$$V = \frac{1{,}982}{3{,}46} \cdot 100 = 57{,}3\,\%.$$

2°. Moda variabilei este 3 deoarece aceasta este valoarea caracteristicii căreia îi corespunde cea mai mare frecvenţă.

3°. Funcţia empirică de repartiţie este:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \frac{3}{50} = 0{,}06 & 0 < x \leqslant 1 \\ 0{,}22 & 1 < x \leqslant 2 \\ 0{,}32 & 2 < x \leqslant 3 \\ 0{,}54 & 3 < x \leqslant 4 \\ 0{,}68 & 4 < x \leqslant 5 \\ 0{,}80 & 5 < x \leqslant 6 \\ 0{,}94 & 6 < x \leqslant 7 \\ 1 & x > 7 \end{cases}$$

Graficul funcţiei este dat în fig. IX.1.

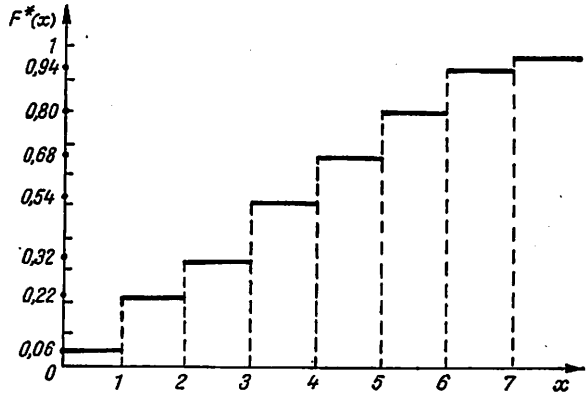


Fig. IX 1.

IX.2. Să se determine volumul minim al unei selecţii aşa încît precizia estimaţiei valorii medii a a populaţiei normal repartizate faţă de media de selecţie să fie $\varepsilon_\beta = 0{,}3$ cu o probabilitate $\beta = 0{,}96$. Se cunoaşte abaterea medie pătratică $\sigma = 1{,}4$.

R. Utilizînd formula care ne dă pe ε_β:

$$\varepsilon_\beta = t_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

deducem

$$n = \frac{t_\beta^2 \sigma^2}{\varepsilon_\beta^2}.$$

Avem $\beta = 0{,}96$ şi $2\Phi^*(x) = 0{,}96$ de unde $\Phi^*(x) = 0{,}485$ iar din anexa 6 găsim $t_\beta = 2{,}17$, rezultă $n = 100$.

IX.3. Se dau trei variabile aleatoare: x ovalitatea bucşelor după o rectificare preliminară, y adaosurile în timpul rectificării finale, iar z ovalitatea după rectificarea finală. Se mai dau

$$\bar{x} = 0{,}045; \quad s_x = 0{,}020, \quad r_{xz} = 0{,}70;$$

$$\bar{y} = 0{,}027; \quad s_y = 0{,}062, \quad r_{yz} = 0{,}42;$$

$$\bar{z} = 0{,}018; \quad s_z = 0{,}012, \quad r_{xy} = 0{,}54.$$

Să se calculeze ecuaţia de regresie a lui Z faţă X şi Y coeficienţii de corelaţie $r_{z\cdot xy}$, $r_{x\cdot yz}$, $r_{y\cdot xz}$.

R. Se ştie că

$$r_{r\cdot xy} = \sqrt{1 - \frac{\bar{\Delta}}{\Delta_{33}}}\,; \quad r_{r\cdot yz} = \sqrt{1 - \frac{\bar{\Delta}}{\Delta_{11}}}\,; \quad r_{y\cdot xz} = \sqrt{1 - \frac{\bar{\Delta}}{\Delta_{22}}},$$

unde Δ_{11}, Δ_{33} sînt complementţii algebrici ai elementelor liniei a treia din determinantul

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & 1 & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & 1 \end{vmatrix},$$

iar linia de regresie este dată de

$$\frac{\hat{z} - \bar{z}}{s_z} = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{x - \bar{x}}{s_x} + \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{y - \bar{y}}{s_y}.$$

Avem

$$\bar{\Delta} = 0{,}36\,;\ \Delta_{33} = 0{,}71\,;\ \Delta_{31} = -0{,}47\,;\ \Delta_{32} = -0{,}04\,;\ \Delta_{11} = 0{,}82\,;\ \Delta_{22} = 0{,}51.$$

Ecuaţia de regresie se scrie

$$\hat{z} = 0{,}40x + 0{,}011y - 0{,}019$$

şi

$$r_{z\cdot xy} = 0{,}70\,;\ r_{x\cdot yz} = 0{,}75\,;\ r_{y\cdot xz} = 0{,}54.$$

IX.4. În cadrul a patru laboratoare diferite de control s-au făcut cîte $l = 10$ măsurători, deci în total $N = k \cdot l = 40$ măsurători, asupra unui anumit reper, şi s-au obţinut următoarele rezultate :

Laboratorul	Valoarea medie	Abaterea medie pătratică	Dispersia
1	$\bar{x}_1 = 151$	$s_1 = 22{,}9$	$s_1^2 = 526$
2	$\bar{x}_2 = 148$	$s_2 = 24{,}1$	$s_2^2 = 583$
3	$\bar{x}_3 = 168$	$s_3 = 24{,}5$	$s_3^2 = 601$
4	$\bar{x}_4 = 173$	$s_4 = 22{,}6$	$s_4^2 = 511$

Să se cerceteze dacă diferenţele dintre valorile medii date de fiecare laborator sînt sistematice sau întîmplătoare.

R. Avem o problemă de dispersie simplă. Vom calcula următoarele caracteristici:

$$\sum_{i=4}^{4} x_i = 640; \quad \bar{\bar{x}} = \frac{640}{4} = 160, \quad \sum_{i=1}^{4} s^2 = 2221;$$

$$\bar{s}_1^2 = \frac{l}{k-s} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 = 1\,527;$$

$$\bar{s}_1^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} s_i^2 = 555.$$

Raportul care trebuie verificat prin proba F este

$$\frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} = 2{,}75.$$

În tabelă găsim $n_1 = k - 1 = 3$ şi $n_2 = N - k = 36$ (n_1 şi n_2 sînt gradele de libertate corespunzătoare) o valoare

$$F > 2{,}84.$$

Întrucît $2{,}75 < 2{,}84$, diferenţele dintre valorile medii ale fiecărui laborator sînt întîmplătoare.

IX.5. Se fac cinci măsurători asupra înălţimii unui punct. Rezultatele măsurătorilor h_i date în mm şi ponderile corespunzătoare p_i sînt date în tabelul următoare:

h_i	p_i	$h_i' = h_i - \beta$	$p_i h_i'$	$h_i - \tilde{h}$	$(h_i - \tilde{h})^2$	$p_i(h_i - \tilde{h})^2$
12 356	1,0	6	6,0	0,64	0,410	0,410
12 361	0,4	11	4,4	4,36	19,010	7,604
12 357	3,0	7	21,0	0,36	0,130	0,390
12 355	0,2	5	1,0	−1,64	2,690	0,538
12 352	0,4	2	0,8	−4,64	21,530	8,612
Total	5,0		33,2			17,554

Să se estimeze înălţimea şi precizia observaţiilor.

R. Vom folosi metoda estimaţiei punctuale pentru estimarea lui h şi σ. Calculele sînt date în tabela unde s-a luat $\beta = 12\,350$ mm. Avem

$$\tilde{x} = \beta + \frac{\sum p_i h_i'}{\sum p_i} = 12\,350 + \frac{33{,}2}{5} = 12\,356{,}64 \text{ mm}$$

şi

$$\tilde{s} = \sqrt{\frac{\sum p_i (h_i - \tilde{h})^2}{\sum p_i}} = \sqrt{\frac{17{,}554}{5}} = 1{,}87;$$

$$q = \sqrt{\frac{\sum p_i (h_i - \tilde{h})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{17{,}554}{4}} = 2{,}09.$$

Căutăm un interval de încredere pentru h. Pentru $n - 1 = 4$ grade de libertate şi un prag $p = 0{,}9$ din tabelele cu distribuţia t (Student) găsim $t = 2{,}132$. Dar

$$\frac{t\tilde{s}}{\sqrt{n-1}} = \frac{(2{,}132)\cdot(1{,}87)}{2} = 1{,}99,$$

deci pentru h am obţinut intervalul de încredere

$$12\,354{,}6 < h < 12\,358{,}7.$$

Precizia măsurătorilor o vom estima pentru un prag $p = 0{,}9$. Tabela cu distribuţia χ^2 dă intervalul de încredere pentru σ plecînd de la condiţia

$$P\left(\sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}}\,q < \tau < \sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}}\,q\right) = P_2 - P_1 = p.$$

Pentru patru grade de libertate, obţinem

$$\sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}} = 0{,}649, \quad \sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}} = 2{,}37,$$

deci pentru σ avem intervalul de încredere

$$1{,}35 < \sigma < 4{,}96.$$

IX.6. Să se determine intervalul de încredere de 99% pentru estimarea mediei teoretice a diametrului a al axului unei piese, în baza unei probe de 8 piese prelucrate la un strung automat. Abaterile dimensiunilor acestor piese de la centrul cîmpului de toleranţă sînt date în tabelul :

Nr. piesei după ordine	1	2	3	4	5	6	7	8
Abaterile dimensiunilor x_i şi μ	+1	+2	−1	+3	−2	+4	+5	+4

R. Media aritmetică de selecţie este

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \frac{16}{8} = 2\mu.$$

Dispersia este

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^2}{n} = 5{,}5.$$

deci $\tilde{s} = 2{,}6$.

Cu ajutorul repartiției Student determinăm intervalul de încredere pentru estimarea medici. Avem

$$P\left(\bar{x} - t_{1;7}\frac{s}{\sqrt{8-1}} < a < \bar{x} + t_{1;7}\frac{s}{\sqrt{8-1}}\right) = 0{,}99.$$

Din tabele pentru $q = 1\%$ și $n - 1 = 7$ găsim $t_{1;7} = 3{,}499$ sau

$$\frac{t_{1;7}\tilde{s}}{\sqrt{n-1}} = 3{,}499\frac{2{,}6}{\sqrt{7}} = 2{,}94,$$

deci

$$-0{,}94 < a < 4{,}94.$$

Așadar, valorile admisibile cu o siguranță de 99% ale parametrului a sînt situate în intervalul $(-0{,}94;\ 4{,}94)$.

IX.7. Se efectuează 12 măsurători independente asupra unei variabile aleatoare X repartizată normal $N(m, \sigma)$ iar rezultatul măsurătorilor este trecut în tabelul următor:

x_i	−0,5	−0,4	−0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

1°. Să se determine o estimație $\tilde{m}$ a valorii medii $M(X)$ și să se determine intervalul de încredere corespunzător probabilității $\beta = 0{,}95$.

R. Avem

$$\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0{,}416, \quad \tilde{D}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m})^2}{n-1} = 0{,}522.$$

Intervalul de încredere va fi

$$I_\beta = \left(\tilde{m} - t_\beta\sqrt{\frac{\tilde{D}^2}{n}};\ \tilde{m} + t_\beta\sqrt{\frac{\tilde{D}^2}{n}}\right).$$

În cazul nostru, din anexa 6 găsim valoarea lui t_β în funcție de probabilitatea $\beta = 0{,}95$ pentru $n - 1 = 11$, $t_\beta = 2{,}20$, deci

$$I_\beta = (-0{,}04;\ 0{,}88).$$

IX.8. Se fac 12 măsurători cu acelaşi aparat a unei mărimi fizice şi se determină abaterea medie pătratică de selecţie $s' = 0{,}6$. Să se determine precizia aparatului cu o probabilitate de 0,95.

R. Problema se reduce la determinarea intervalului de încredere

$$s'(1 - q) < \sigma < s'(1 + q), \text{ dacă } q < 1$$

şi

$$0 < \sigma < s'(1 + q), \text{ dacă } q > 1.$$

Pentru $n = 12$ şi $\beta = 0{,}95$, din anexa 7 se găseşte $q = 0{,}55$ şi cum $q < -1$ găsim intervalul de încredere

$$0{,}27 < \sigma < 0{,}93.$$

IX.9. Se face o selecţie mare de 150 piese din producţia unui strung automat, formată din cinci probe independente de cîte 30 piese (probe luate în anumite intervale de timp). Se presupune că abaterea medie generală de la dimensiunea nominală în întreaga selecţie este $\bar{x} = 1{,}50$ mm, iar abaterea medie pătratică empirică generală este $s = 0{,}36$ mm.

Să se estimeze cu un prag de semnificaţie de 5%, dacă discordanţa dintre media aritmetică a probei nr. 2 este egală cu $\bar{x}_2 = 1{,}85$ şi media aritmetică generală a întregii selecţii este esenţială.

R. Notăm abaterea relativă a mediei $\bar{x}_2$ a subgrupei, de la media generală $\bar{x}$ cu

$$y_2 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}}{s}.$$

Se arată apoi că variabila

$$t = \frac{y_2 \sqrt{(m(n-2)}}{\sqrt{n - m - m y_2^2}}$$

urmează o lege Student cu $k = n - 2$ grade de libertate. Avem pentru $m = 30$ şi $n = 150$

$$t = \frac{0{,}69 \sqrt{30(150-2)}}{\sqrt{150 - 30 - 30 \cdot 0{,}692}} = 4{,}4.$$

Pentru $q = 5\% = \infty$ (selecţie mare) şi $k = 148$ grade de libertate

$$t_{5;\infty} = 1{,}96,$$

deci media probei 2 aparţine domeniului critic dat de inegalitatea

$$\bar{x} > t_q \cdot \frac{\sqrt{m(n-2)}}{\sqrt{n-m-y_2^2}}$$

şi deci ipoteza cu privire la omogenitatea mediilor probei nr. 2 şi a selecţiei întregi trebuie respinsă.

IX.10. Dintr-o selecţie ordonată de 20 piese a căror caracteristică este grosimea (în mm) s-au obţinut următoarele date:

i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	10,5	6	10,6	11	10,6	16	10,9
2	10,8	7	10,9	12	11,3	17	10,8
3	11,2	8	11,0	13	10,5	18	10,7
4	10,9	9	10,3	14	10,7	19	10,9
5	10,4	10	10,8	15	10,8	20	11,0

1°. Să se calculeze următoarele funcţii empirice de repartiţie

$$\bar{F}_{20}(10),\ \bar{F}_{20}(10{,}5),\ \bar{F}_{20}(11).$$

2°. Să se calculeze momentele centrate de ordinele unu, doi şi trei.

3°. Să se determine o estimaţie pentru valoarea medie a variabilei aleatoare X şi intervalul de încredere corespunzător cu o probabilitate $\beta = 0{,}8$.

R. 1°. Avem $\bar{F}_n(x) = \frac{n_x}{n}$, unde n_x este numărul valorilor din selecţie, situate la stînga lui x, $n = 20$. Deci

$$\bar{F}_{20}(10) = 0,\ F_{20}(10{,}5) = \frac{3}{20}.\ \ \bar{F}_{20}(11) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

2°. Momentul de ordinul r al selecţiei μ_r este

$$\mu_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0)^r,$$

cu x_0 valoarea inițială, un număr arbitrar. Fie $x_0 = 10{,}5$. Avem următorul tabel:

i	x_i	$v_i = (x_i - x_0) \cdot 100$	v_i^2	v_i^3	i	x_i	v_i	v_i^2	v_i^3
1	10,5	0	0	0	11	10,6	10	100	10 000
2	10,8	30	900	810 000	12	11,3	80	6 400	40 960 000
3	10,2	30	900	−810 000	13	10,5	0	0	0
4	10,9	40	1 600	2 560 000	14	10,7	20	400	160 000
5	10,4	10	100	−10 000	15	10,8	30	900	810 000
6	10,6	10	100	10 000	16	10,9	40	1 600	2 560 000
7	10,9	40	1 600	2 560 000	17	10,8	30	900	810 000
8	11,0	50	2 500	6 250 000	18	10,7	20	400	160 000
9	10,3	20	400	−160 000	19	10,9	40	1 600	2 560 000
10	10,8	30	900	810 000	20	11,0	50	2 500	6 250 000
Total		140	8 100	12 020 000			320	14 800	44 280 000

Din această, tabelă rezultă

$$b_1 = 0{,}23, \quad b_2 = 1{,}64 \text{ și } b_3 = 2{,}815.$$

Media aritmetică este egală cu $\bar{x} = 10{,}5 + 0{,}23 = 10{,}73$.
Pentru momentele centrate avem relațiile:

$$m_2 = b_2 - (\bar{x} - x_0)^2 = 1{,}64 - 0{,}052 = 1{,}58,$$

$$m_3 = b_3 - 3m_2(\bar{x} - x_0) - (\bar{x} - x_0)^2 = 1{,}7128.$$

3°. Avem

$$S'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 = 0{,}064, \quad \sigma_{\bar{x}} = 0{,}0564$$

și

$$t_\beta = \arg \Phi^* \left(\frac{1+\beta}{2} \right).$$

Din anexa 5 găsim pentru $\beta = 0{,}8$, $t_\beta = 1{,}282$ și $\varepsilon_\beta = t_\beta \sigma_{\bar{x}} = 0{,}072$.

Intervalul de încredere pentru valorile parametrului m este

$$I_\beta = (10{,}72;\ 10{,}85).$$

IX.11. Raza unei piese circulare este măsurată cu o eroare de observație care este normal distribuită în jurul lui zero, cu dispersia σ^2 necunoscută. Să se determine o estimație absolut corectă pentru aria acestui cerc, dat fiind n măsurători independente ale razei.

R. Fie a raza cercului şi r rezultatele măsurătorilor. Atunci r este distribuit $N(a, \sigma^2)$, unde $M(r) = a$, $M[(r-a)^2] = \sigma^2$. Rezultă

$$M(r^2) = \sigma^2 + a^2.$$

Fie $r_1, \ldots, r_n$ cele n măsurători independente şi $\theta(r_1, \ldots, r_n)$ o estimaţie absolut corectă a ariei cercului. Avem

$$M(\theta(r_1, \ldots, r_n)) = \pi a^2.$$

Luăm

$$\theta(r_1, r_2, \ldots, r_n) = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^n.$$

Rezultă

$$M(r_1^2 + \ldots + r_n^2) = nM(r^2) = n\sigma^2 + na^2$$

sau

$$\frac{\pi}{n} M(r_1^2 + \ldots + r_n^2) - \pi\sigma^2 = \pi a^2.$$

Deci

$$\frac{\pi}{n}(r_1^2 + \ldots + r_n^2) - \pi\sigma^2$$

este o estimaţie absolut corectă pentru aria cercului πa^2.

Se ştie că $\frac{ns^2}{n-1}$ este o estimaţie absolut corectă pentru σ^2 deoarece $M\left[\frac{ns^2}{n-1}\right] = \sigma^2$, unde s^2 este dispersia de selecţie. Dacă σ^2 este necunoscută, o estimaţie absolut corectă pentru aria cercului este

$$\frac{\pi}{n}(r_1^2 + \ldots + r_n^2) - \pi\frac{ns^2}{n-1}.$$

IX.12. Să se determine estimatorul de maximă verosimilitate pentru θ pe baza a n observaţii pentru funcţia de frecvenţă

$$f(x, \theta) = (1+\theta)x^\theta, \quad \theta > 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

R. Probabilitatea obţinerii valorilor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este

$$P(x, \theta) = (1+\theta)^n \prod_1^n x_i^\theta,$$

$$\ln P(x, \theta) = n \ln(1+\theta) + \theta \sum_1^n \ln x_i.$$

Ecuaţia de maximă verosimilitate este

$$\frac{\partial \ln P(x, \theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{1+\theta} + \sum_1^n \ln x_i = 0.$$

Cea mai bună estimaţie dată de metoda verosimilităţii maxime pentru parametrul θ este

$$\bar{\theta} = -\frac{n}{\sum_{1}^{n} \ln x_i} - 1.$$

IX.13. Se consideră familia de repartiţii normale cu funcţie de frecvenţă

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

unde media m este cunoscută, iar σ un parametru necunoscut. Să se estimeze σ pe baza a n observaţii independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se cerceteze existenţa unei statistici exhaustive.

R. Aplicăm metoda bazată pe determinarea unei statistici necesare şi suficiente. O statistică necesară şi suficientă se poate obţine aplicînd relaţia

$$g(x, \sigma) = \ln f(x, \sigma) - \ln f(x, \sigma_0),$$

unde σ_0 este o valoarea particulară dată parametrului σ. Avem

$$g(x, \sigma) = -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \frac{(x-m)^2}{2\sigma_0^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right](x-m)^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i, \sigma) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(x-m)^2.$$

O statistică necesară şi suficientă echivalentă este

$$\bar{\alpha}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}.$$

Pentru obţinerea unei estimaţii absolut corecte trebuie deci să considerăm o funcţie de $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta} = \varphi(\bar{\alpha})$ astfel încît

$$M(\bar{\beta}) = \sigma, \; D^2(\bar{\beta}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Fie

$$\bar{\beta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}}.$$

Variabilele $x_i - m$ urmează o repartiție normală $(0, \sigma)$ și sînt independente. Legea de probabilitate a lui $\overline{\beta}$ este

$$\frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{n}{2\sigma^2} x^2}.$$

Avem

$$M(\overline{\beta}) = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sigma.$$

Considerînd expresia

$$\overline{\sigma}(x) = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}{n}},$$

obținem

$$E(\overline{\sigma}) = \sigma,$$

$$D^2(\overline{\sigma}) = \sigma^2 \left[\frac{n}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} - 1 \right].$$

Asimptotic avem

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x},$$

de unde rezultă

$$D^2(\overline{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Prin urmare, $\overline{\sigma}(x)$ este o estimație absolut corectă a lui σ.
Scriind $\overline{\sigma}(x)$ sub forma

$$\overline{\sigma}(x) = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)} \sqrt{\dfrac{2}{\pi} \sum_{i=n}^{n} (x_i - m)^2}, & \text{pentru } n \text{ par}, \\[2ex] \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (n-2)} \sqrt{\dfrac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}, & \text{pentru } n \text{ impar}, \end{cases}$$

teorema minimului dispersie ne arată că

$$D^2(\bar{\sigma}) \geqslant \frac{1}{nM\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \sigma}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{2n}.$$

Calculînd valoarea lui $D^2(\bar{\sigma})$ ám văzut că diferă de $\frac{\sigma^2}{2n}$, deci $\bar{\sigma}$ este numai o estimaţie suficientă, în virtutea existenţei unei statistici exhaustive.

Eficienţa $e_n(\bar{\sigma})$ este dată de formula

$$e_n(\bar{\sigma}) = \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{n}{2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)} - 1}.$$

şi $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(\bar{\sigma}) = 1$, deci $\bar{\sigma}$ este o estimaţie eficient asimptotică.

Metoda verosimilităţii maxime ne dă

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}}. \tag{1}$$

Dar dacă există o estimaţie suficientă, ea este funcţie de valoare (1), ceea ce s-a constatat direct cu estimaţia $\bar{\sigma}(x)$.

I X.14. Să se estimeze probabilitatea unui eveniment A, $p = P(A)$ cunoscînd frecvenţa sa p^* în n experienţe independente [45].

R. Frecvenţa evenimentului A în n experienţe independente este egală cu media aritmetică a valorilor observate ale variabilei aleatoare ξ, care în fiecare experienţă ia valorile 1 sau 0, după cum se realizează sau nu evenimentul A, deci

$$p^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Avem

$$M(\xi) = p, \quad D^2(\xi) = pq, \quad q = 1 - p$$

şi

$$M(p^*) = p, \quad D^2(p^*) = \frac{pq}{n},$$

Se poate arăta că dispersia $D^2(p^*)$ este suficient de mică, deci estimația p^* pentru p este efectivă.

Să determinăm intervalul de încredere pentru p. Pentru aceasta considerăm cazul în care p nu este nici mic, nici prea mare și că frecvența p^* a evenimentului (care este o variabilă aleatoare discretă) este repartizată după o lege apropiată de cea normală. Parametrii acestei repartiții sînt

$$m_{p^*} = p; \qquad \sigma_{p^*} = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Presupunînd p cunoscut, fixăm o probabilitate de încredere γ și determinăm intervalul $(p - \varepsilon\beta, p + \varepsilon\beta)$ așa încît p^* să cadă în acest interval cu o probabilitate β, adică

$$P(|p^* - p| < \varepsilon\beta) = \beta,$$

iar p^* fiind repartizată normal avem

$$P(|p^* - p| < \varepsilon\beta) = 2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma^*_{p^*}}\right) - 1 = \beta,$$

de unde

$$\varepsilon_\beta = \sigma_{p^*} \arg \Phi^{*-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right),$$

unde Φ^{*-1} este funcția inversă a funcției de repartiție

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Deci cu o probabilitate β putem spune că

$$|p^* - p| < \sqrt{\frac{pq}{n}}\, \Phi^{*-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right). \tag{1}$$

În practică se obține experimental o valoare a frecvenței p^* și se poate utiliza inegalitatea (1) pentru determinarea intervalului I_β în care se află p (de obicei necunoscut) cu o probabilitate β. Scriind inegalitatea (1):

$$(p^* - p)^2 < \frac{p(1-p)}{n}\left(\Phi^{*-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\right)^2,$$

de unde determinăm limitele de încredere

$$p_{1,2} = \frac{p^* + \frac{1}{2}\frac{t_\beta^2}{2} \pm t_\beta \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{1}{4}\frac{t_\beta^2}{n^2}}}{1 + \frac{t_\beta^2}{n}}, \quad t_\beta = \Phi^{*-1}$$

și $I_\beta = (p_1, p_2)$.

Pentru n foarte mare

$$p_{1,2} = p^* \mp t_\beta \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}.$$

IX.15. Frecvenţa p^* a unui eveniment A într-o serie de 150 experienţe este egală cu 0,73. Să se determine intervalul de încredere cu un prag de 90% pentru probabilitatea evenimentului A.

R. Verificăm dacă este posibilă utilizarea legii normale. Pentru aceasta calculăm mărimile np şi nq. Presupunînd $p \approx p^*$ obţinem

$$np \approx np^* = 109{,}5\,; \quad nq = n(1 - p^*) = 40{,}5.$$

Aceste valori sînt cu mult mai mari decît 4 din legea normală este aplicabilă. Din anexa 5 avem pentru $\beta = 0{,}9$, $t_\beta = 1{,}643$ şi inegalitatea

$$|p^* - p| < t_\beta \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

ne dă limitele de încredere p_1 şi p_2

$$p_{1,2} = \frac{p^* + \frac{1}{2}\frac{t_\beta^2}{n} \mp t_\beta \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \frac{1}{4}\frac{t_\beta^2}{n^2}}}{1 + \frac{t_\beta^2}{n}}.$$

Avem

$$p_1 = 0{,}704, \; p_2 = 0{,}748$$

şi

$$I_\beta = (0{,}704\,;\, 0{,}748).$$

IX.16. Fie o schemă Bernoulii cu două stări. În fiecare probă probabilitatea de a se obţine o stare este p iar probabilitatea contrarie q. În probe consecutive s-a obţinut frecvenţa $\frac{\nu}{n}$. Să se estimeze p^2 şi p cu ajutorul lui ν.

R. Avem

$$M\left(\frac{\nu}{n}\right) = p, \quad D\left(\frac{\nu}{n}\right) = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Deoarece $D\left(\frac{\nu}{n}\right) \to 0$, rezultă că $\frac{\nu}{n}$ este o estimaţie absolut corectă a lui p. Înplus

$$M\left(\frac{\nu}{n+1}\right) = p - \frac{p}{n+1}, \quad D\left(\frac{\nu}{n+1}\right) = \frac{\sqrt{npq}}{n+1}.$$

Prin urmare, şi $\frac{\nu}{n+1}$ converge în probabilitate către p însă, din cauza termenului $-\frac{p}{n+1}$, valoarea $\frac{\nu}{n+1}$ este numai o estimaţie corectă a lui p, comportînd eroarea sistematică negativă $-\frac{p}{n+1}$.

Pentru a estima pe p^2, să încercăm să-l estimăm prin $\frac{\nu^2}{n^2}$ deoarece pentru p am găsit estimaţia $\frac{\nu}{n}$. Avem

$$M\left(\frac{\nu^2}{n^2}\right) = p^2 + \frac{pq}{n}, \quad D\left(\frac{\nu^2}{n^2}\right) = \sqrt{\frac{4p^3q}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

De aici rezultă că $\frac{\nu^2}{n^2}$ este o estimaţie corectă pentru p^2. Pentru a găsi o estimaţie absolut corectă, observăm că

$$M\left(\frac{\nu^2}{n^2}\right) = \frac{n-1}{n}p^2 + \frac{p}{n}, \quad M\left(\frac{\nu}{n^2}\right) = \frac{p}{n},$$

deci

$$M\left(\frac{\nu^2}{n^2} - \frac{\nu}{n^2}\right) = \frac{n-1}{n}p^2$$

şi

$$M\left(\frac{\nu^2-\nu}{n(n-1)}\right) = p^2, \quad D\left(\frac{\nu^2-\nu}{n(n-1)}\right) = \sqrt{\frac{4p^3q}{n} + \frac{1}{n}}.$$

Rezultă deci că $\frac{\nu^2-\nu}{n(n-1)}$ este o estimaţie absolut corectă a lui p_2.

Să arătăm acum că estimaţia absolut corectă pentru p este şi o estimaţie eficientă. Fie

$$\overline{\alpha}(\nu) = \frac{\nu}{n}$$

funcţia de estimaţie. Din teorema minimului varianţei ştim că, oricare ar fi estimaţia corectă $\beta(\nu)$, are loc inegalitatea

$$D^2(\overline{\beta}) \geqslant \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \ln p_i}{\partial p}\right)^2 p_i(\alpha)}.$$

În cazul nostru parametrul α este egal cu p,

$$p_1(p) = p,$$

$$p_2(p) = 1 - p,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \ln p_i}{\partial p} \right)^2 p_i = p \frac{1}{p^2} + (1-p) \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{pq}.$$

Prin urmare,

$$D^2(\bar{\beta}) \geqslant \frac{pq}{n}.$$

Minimul este atins pentru $\frac{\nu}{n}$, care este o estimație eficientă.

IX.17. Se dă funcția de frecvență

$$f(x) = \frac{1}{\sigma^p \Gamma(p)} \left(\frac{(x-\alpha)}{\sigma} \right)^{p-1} e^{-\frac{x-\alpha}{\sigma}}, \quad \alpha \leqslant x < \infty, \quad \alpha > 0, \quad p > 2.$$

Să se estimeze parametrii α, σ, p pe baza unei selecții de volum n.

R. Pentru funcția de verosimilitate

$$P = \sigma^{-np} [\Gamma(p)]^{-n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \alpha}{\sigma} \right)^{p-1} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \alpha}{\sigma}}$$

avem

$$\ln P = -np \ln \sigma - n \ln \Gamma(p) + \sum_{i=1}^{n} (p-1) \ln \frac{x_i - \alpha}{\sigma} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \alpha}{\sigma}.$$

Ecuațiile de verosimilitate sînt

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \alpha} = -(p-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - \alpha} + \frac{n}{\sigma} = 0.$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \sigma} = -\frac{np}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \alpha}{\sigma^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln P}{\partial p} = -n \ln \sigma - n \frac{d}{dp} (\ln \Gamma(p)) + \sum_{i=1}^{n} \ln (x_i - \alpha) = 0.$$

Matricea inversă a dispersiilor este

$$V^{-1} = n \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sigma^2(p-2)} & \frac{1}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma(p-1)} \\ \frac{1}{\sigma^2} & \frac{p}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma} \\ \frac{1}{\sigma(p-1)} & \frac{1}{\sigma} & \frac{d^2 \ln \Gamma(p)}{dp^2} \end{Vmatrix}$$

cu determinantul

$$|V^{-1}| : n^3 = \Delta = \frac{1}{(p-2)\sigma^4} \left[2 \frac{d^2 \ln \Gamma(p)}{dp^2} - \frac{2}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} \right].$$

Dispersiile de selecţie sînt

$$D^2(\overline{\alpha}) = \frac{1}{n\sigma\Delta^2} \left[p \frac{d^2 \ln \Gamma(p)}{dp^2} - 1 \right],$$

$$D^2(\overline{\sigma}) = \frac{1}{n\Delta\sigma^2} \left[\frac{1}{p-2} \frac{d^2 \ln \Gamma(p)}{dp^2} - \frac{1}{(p-1)^2} \right],$$

$$D^2(\overline{p}) = \frac{1}{n\Delta(p-2)\sigma^4} = \frac{2}{n} \Bigg/ \left[2 \frac{d^2 \ln \Gamma(p)}{dp^2} - \frac{2}{p-1} \frac{1}{(p-2)^2} \right].$$

Pentru p mare folosim formula lui Stirling:

$$\frac{d^2 \ln \Gamma(p)}{dp^2} = \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{1}{2} \ln (2\pi) + \left(p + \frac{1}{2} \right) \ln p - p + \frac{1}{12p} - \frac{1}{360p^2} + \dots \right]$$

şi obţinem

$$2 \frac{d^2 \ln \Gamma(1+p)}{dp^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{5p^5} + \frac{1}{7p^7} - \dots \right],$$

deci

$$D^2(\overline{p}) = \frac{6}{n} \left[(p-1)^3 + \frac{1}{5}(p-1) \right].$$

Dacă estimăm parametrii prin egalarea momentelor de selecţie cu momentele corespunzătoare, găsim

$$\alpha + \sigma p = m_1; \quad \sigma^2 p = m_2; \quad 2\sigma^3 p = m_3; \quad b_1 = \frac{m_3^2}{m_2^3} = \frac{4}{p},$$

b_1 fiind valoarea de selecţie a lui p_1.

Pentru estimarea prin metoda momentelor,

$$D^2(b_1) = \frac{\beta_1}{n}\,[4\beta_4 - 24\,\beta_2 + 36 + 9\beta_1\beta_2 - 12\beta_3 + 35\beta_1]$$

care se reduce în cazul de faţă la

$$D^2(b_1) = \frac{\beta_1^2}{n} \cdot \frac{6(p+1)(p+5)}{p}.$$

Avem

$$D^2(\tilde{p}) = \frac{p^4}{16}\,D^2(b_1) = \frac{6}{n}\,p(p+1)(p+5).$$

Eficienţa acestui estimator pentru p mare este mai mică ca 1.

$$\frac{D^2(\bar{p})}{D^2(\tilde{p})} = \frac{(p-1)^3 + (p-1)/5}{p(p+1)(p+5)}.$$

IX.18. Doi observatori fac 100 măsurători asupra unei variabile continue. Rezultatele observaţiilor sînt:

y \ x	10	15	20	25	30	35	n_y
20	5	2	—	—	—	—	7
25	—	5	4	—	—	—	9
30	—	—	6	40	4	—	50
35	—	—	—	8	8	—	16
40	—	—	—	4	5	9	18
n_x	5	7	10	52	17	9	$n = 100$

1°. Să se calculeze coeficientul de corelaţie de selecţie r_s.

2°. Să se verifice ipoteza $H_0 : r_s = r$, faţă de alternativa $H_1 : r \neq 0$, pentru un prag de semnificaţie $\alpha = 0{,}05$ (v. anexa 2).

R. 1°. Avem $\bar{x} = 24{,}7$, $\bar{y} = 31{,}45$.

Pentru determinarea coeficientului de corelaţie de selecţie utilizăm tabelul următor:

$y-\bar{y}$ \ $x-\bar{x}$	−14,7	−9,7	−4,7	0,3	5,3	10,3
−11,45	841,575	222,13	—	—	—	—
− 6,5	—	555,325	122,2	—	—	—
− 1,5	—	—	42,3	−18	−31,8	—
3,5	—	—	—	8,4	148,4	—
8,5	—	—	—	10,2	225,25	787,95

în care am trecut valorile $(x - \bar{x})$ $(y - \bar{y})$ multiplicate prin numărul corespunzător al măsurătorilor din tabel,

$$r_s = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \bar{x})^2 \Sigma(y - \bar{y})^2}} = 0{,}924.$$

2°. Pentru verificarea ipotezei calculăm valoarea de observaţie cu ajutorul criteriului.

$$T_{obs_2} = \frac{r_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_s^2}} = 24{,}26\,;$$

Ipoteza alternativă fiind de forma $r \neq 0$, regiunea critică este bilaterală. Din anexa 3, pentru distribuţia Student, pentru $\alpha = 0{,}05$, pentru 98 grade de libertate găsim punctul critic al regiunii $t_{cr}(0{,}05\,;\ 98) = 1{,}665$.

Deoarece $T_{obs_2} > t_{cr}$ respingem ipoteza H_0 asupra egalităţii coeficienţilor de corelaţie.

IX.19. Din populaţiile normale X şi Y se fac două selecţii de volume $n = 10$, $m = 13$, şi se determină dispersiile de selecţie $s_X'^2 = 0{,}85$ şi $s_Y'^2 = 2{,}35$. Să se verifice ipoteza

$$H_0 : D^2(X) = D^2(Y)$$

faţă de alternativa

$$H_1 : D^2(X) \neq D^2(Y)$$

pentru un prag de semnificaţie $\alpha = 0{,}02$.

R. Pentru verificarea ipotezei H_0 aplicăm statistica

$$F_{obs} = \frac{s_{max}'^2}{s_{min}'^2} = \frac{2{,}35}{0{,}85} = 2{,}764.$$

Ţinînd seama de forma alternativei H_1, (vezi anexa 4), cu punctele critice ale distribuţiei Fisher-Snedecor pentru $\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}02}{2} = 0{,}01$ şi $k_1 = m - 1$, $k_2 = n - 1$ grade de libertate (k_1 = numărul gradelor de libertate corespunzătoare celei mai mari dispersii), găsim $F_{cr}(0{,}01\,;\ 12\,;\ 9) = 5{,}11$.

Deoarece $F_{obs} < F_{cr}$, acceptăm ipoteza H_0.

IX.20. Se fac două selecţii independente de volume $n = 11$, $m = 15$ din două populaţii normale X şi Y şi se determină dispersiile de selecţie $s_X'^2 = 35{,}07$ şi $s_Y'^2 = 10{,}03$. Să se verifice ipoteza

$$H_0 : D^2(X) = D^2(Y)$$

faţă de alternativa

$$H_1 : D^2(X) > D^2(Y)$$

cu un prag de semnificaţie $\alpha = 0{,}01$.

R. Avem

$$F_{obs} = \frac{35,07}{10,03} = 3,496.$$

Din anexa 4 pentru $\alpha = 0,01$ şi $k_1 = 11 - 1 = 10$, $k_2 = 14$ grade de libertate avem $F_{cr}(0,01;\ 10;\ 14) = 3,94$

$$F_{obs} < F_{cr},$$

deci ipoteza H_0 se acceptă.

IX.21. Dintr-o populaţie normală se extrage un eşantion de volum $n = 23$, pentru care se determină dispersia de selecţie $s'^2 = 0,27$. Să se verifice cu un prag de semnificaţie $\alpha = 0,05$ ipoteza

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,2$$

faţă de alternativa

$$H_1 : \sigma^2 > 0,2.$$

R. Vom utiliza testul χ^2. Din datele observate obţinem

$$\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)\, s'^2}{\sigma_0^2} = \frac{(23-1)\, 0,27}{0,2} = 29,7.$$

Din anexa 2 pentru punctele critice ale distribuţiei χ^2 corespunzătoare pentru $k = n - 1 = 22$ grade de libertate găsim punctul critic $\chi^2_{cr}(0,05;\ 22) = 33,9$. Rezultă $\chi^2_{obs} < \chi^2_{cr}$, deci acceptăm ipoteza H_0.

IX.22. S-au făcut 25 de observaţii cronometrîndu-se timpul de paginare pentru diferiţi muncitori şi s-a stabilit că dispersia timpului este $\sigma_0^2 = 3$ min. Rezultatele experienţei sînt trecute în tabelul următor:

timpul de paginare în minute	55	57	60	61	63
frecvenţa	2	5	9	6	6

Să se cerceteze dacă pentru un prag de semnificaţie $\alpha = 0,02$ (v. anexa 3) un începător lucrează ritmic?

R. Problema se reduce la verificarea ipitezei

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 3$$

faţă de alternativa

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

deci trebuie verificat dacă dispersia timpului de funcţionare nu diferă substanţial de dispersia timpului celorlalţi paginatori.

Avem $\bar{x} = 59{,}6$, $s'^2 = 2{,}58$.
Utilizînd testul χ^2 din datele observate obţinem

$$\chi^2_{obs} = 20{,}66.$$

Avînd în vedere forma alternativei avem punctele critice:

$$\chi^2_{cr.dr.}(0{,}01;\ 24) = 43;\quad \chi^2_{cr.dr.}(0{,}99;\ 24) = 10{,}9.$$

Rezultă

$$\chi^2_{cr.st.} < \chi^2_{obs} < \chi^2_{cr.dr.}$$

deci ipoteza H_0 se acceptă.

IX.23. Un lot de produse este admis dacă dispersia dimensiunii nu este mai mare semnificativ ca 0,3. Se consideră un eşantion de volum $n = 150$ şi se determină $s'^2 = 0{,}4$. Se poate admite produsul cu un prag de semnificaţie $\alpha = 0{,}02$?

R. H_0: $\sigma^2 = \sigma_0 = 0{,}3$.

H_1: $\sigma^2 > 0{,}3$.

Utilizînd testul χ^2 obţinem

$$\chi^2_{obs.} = 198{,}66.$$

Ipoteza alternativă fiind de forma $\sigma^2 > 0{,}3$ regiunea critică este de dreapta.
Dacă tabelele χ^2 nu conţin valori corespunzătoare pentru $k = 149$ grade de libertate, vom putea obţine punctul critic aproximativ utilizînd formula Wilson-Gilferty:

$$\chi^2_{cr.}(\alpha;\ k) = k\left[1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right]^3$$

unde z_α se determină cu ajutorul funcţiei Laplace

$$\Phi^*(z_\alpha) = \frac{1 - 2\alpha}{2}.$$

Avem

$$\Phi^*(z_{0.02}) = \frac{1 - 2\cdot 0{,}02}{2} = 0{,}48.$$

Din anexa 3 găsim $\alpha_{0.02} = 2{,}06$ şi

$$\chi^2_{cr.}(0{,}02;\ 149) = 185{,}058.$$

Rezultă $\chi^2_{obs.} > \chi^2_{cr}$ deci ipoteza H_0 se respinge. Lotul de produse nu este admis.

IX.24. La un atelier se aduc 100 de lămpi de radio de acelaşi tip; 50 produse de fabrica A şi 50 produse de fabrica B. După încercări se constată că lămpile aduse de la fabrica A funcţionează în medie 1 300 ore cu o abatere standard de 75 ore iar cele de la fa-

brica B funcţionează în medie 1 280 ore cu o abatere standard de 82 ore.

Cele două tipuri de lămpi diferă calitativ?

R. Trebuie testată ipoteza

$$H_0 : m_1 = m_2$$

faţă de alternativa

$$H_1 : m_1 \neq m_2.$$

Deoarece $\bar{x}_1$ şi $\bar{x}_2$ se bazează pe eşantioane de volume $n_1 = n_2 = 50$, putem presupune că sînt normal distribuite. Eşantioanele sînt independente deci $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ este normal distribuită şi $m_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = m_{\bar{x}_1} - m_{\bar{x}_2}$ iar deviaţia standard este

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{n_1 - n_2}},$$

unde σ_1^2 şi σ_2^2 sînt necunoscute însă pentru eşantioane de volum mare ele se pot aproxima prin valorile de selecţie. Avem

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - m_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{20}{\sqrt{\frac{(75)^2}{50} + \frac{(82)^2}{50}}} = 1{,}27.$$

Alegînd un prag de semnificaţie $\alpha = 0{,}05$, din anexa 4 obţinem valoarea critică a lui t, $t_{cr} = 1{,}96$ şi

$$|t| < t_{cr},$$

nu avem motiv să respingem ipoteza H_0.

IX.25. Din două populaţii cu caracteristicile X şi Y normal repartizate cu $D^2(X) = 70$, $D^2(Y) = 90$ se fac două selecţii independente de volume $n_1 = 40$ respectiv $n_2 = 50$. Cunoscînd $\bar{x} = 120$, $\bar{y} = 130$, să se testeze ipoteza $H_0 : M(X) = M(Y)$ faţă de alternativa $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ cu un prag de semnificaţie α de 1%.

R. Avem

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D^2(X)}{n_1} + \frac{D^2(Y)}{n_2}}} = \frac{120 - 130}{\sqrt{\frac{70}{40} + \frac{90}{50}}} = -1{,}6.$$

Avînd în vedere ipoteza alternativă rezultă că regiunea critică este bilaterală. Punctele critice se obţin din egalitatea

$$\Phi^*(t_{cr}) = \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{1 - 0{,}01}{2} = 0{,}495.$$

Din anexa 3 obţinem $t_{cr} = 2{,}57$ şi $|t| > t_{cr}$ deci nu admitem ipoteza H_0.

IX.26. Se iau două eşantioane independente de volume, $n_1 = 10$ şi $n_2 = 8$, din populaţii normale. Cunoscînd mediile de selecţie

$\bar{x}_1 = 142$ şi $\bar{x}_2 = 144{,}5$ şi dispersiile de selecţie $s_1'^2 = 2{,}7$ şi $s_2'^2 = 3{,}5$, cu un prag de semnificaţie $\alpha = 0{,}05$, să se verifice ipoteza

$$H_0 : m_1 = m_2$$

faţă de alternativa

$$H_1 : m_1 \neq m_2.$$

R. Avem n_1 şi n_2 mai mici decît 30. Deoarece dispersiile de selecţie sînt diferite, vom verifica în prealabil cu ajutorul criteriului Fisher-Snedecor egalitatea dispersiilor. Avem

$$F_{obs} = \frac{s_1'^2}{s_2'^2} = \frac{2{,}7}{3{,}5} = 0{,}7.$$

Din anexa 4 pentru $\alpha = 0{,}05$ şi pentru $k_1 = n_1 - 1 = 9$ şi $k_2 = n_2 - 1 = 7$ grade de libertate, obţinem $F_{cr}(0{,}05;\ 9;\ 7) = 3{,}68$.
Rezultă $F_{obs} < F_{cr}$, deci nu respingem ipoteza asupra egalităţii dispersiilor.

Avem

$$T_{obs} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)\, s_1'^2 + (n_2 - 1)\, s_2'^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} = -3{,}05.$$

Din tabelele care dau punctele critice pentru distribuţia Student (v. anexa 3) pentru $\alpha = 0{,}05$ şi $k = n_1 + n_2 - 2 = 16$ grade de libertate, găsim $t_{cr} = 2{,}12$. Avem $|T_{obs}| > t_{cr}$, deci ipoteza H_0 se respinge.

IX.27. Două maşini identice produc acelaşi tip de articol. Se fac două selecţii de volume $n_1 = 12$ şi $n_2 = 15$ şi se măsoară dimensiunea produsului, datele fiind trecute în tabelul următor:

x_{i_1}	3,5	3,6	3,7	3,8	x_{i_2}	3,4	3,6	3,8
n_{i_1}	3	4	2	3	n_{i_2}	2	4	9

Cu un nivel de semnificaţie $\alpha = 0{,}02$ să se verifice ipoteza

$$H_0 : m_1 = m_2,$$

care reprezintă egalitatea între dimensiunile medii ale produselor faţă de alternativă

$$H_1 : m_1 \neq m_2.$$

R. Avem

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum n_{i_1} x_{i_1}}{n_1} = 3{,}65, \quad \bar{x}_2 = 3{,}63$$

$$s_1'^2 = \frac{S_{u_1}^2}{100}, \quad \text{şi} \quad s_2'^2 = \frac{S_{u_2}^2}{100},$$

unde

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{[n_i u_i]^2}{n}}{n-1}$$

cu $u_i = 10(x_i - \bar{x})$.

Deci

$$u_{i_1} = 10\, x_{i_1} - 36{,}5, \qquad u_{i_2} = 10\, x_{i_2} - 36{,}3$$

$$S_{u_1}^2 = 0{,}4606, \qquad S_{u_2}^2 = 1{,}095$$

de unde

$$S_1'^2 = 0{,}0046, \qquad S_2'^2 = 0{,}0109.$$

Dispersiile de selecţie sînt diferite. Vom verifica ipoteza egalităţii dispersiilor generale. Deci vom verifica ipoteza

$$H_0 : D_1^2 = D_2^2,$$

faţă de alternativa

$$H_1 : D_1^2 \neq D_2^2.$$

Avem :

$$F_{obs} = \frac{0{,}0046}{0{,}0109} = 0{,}422.$$

Din anexa 4 pentru $\alpha = 0{,}01$ şi $k_1 = 11$, $k_2 = 14$ grade de libertate, obţinem $F_{cr}(0{,}01\,;\ 11\,;\ 14) = 3{,}86$ deci admitem ipoteza egalităţii dispersiilor.

În aceste condiţii

$$T_{obs} = 0{,}56.$$

Din anexa 4 pentru $\alpha = 0{,}02$ şi $k = 15$ grade de libertate, găsim $t_{cr} = 2{,}60$. Avem $T_{obs} < t_{cr.}$, deci ipoteza H_0 se acceptă.

IX.28. Dintr-o populaţie distribuită normal $N(m, \sigma)$ cu $\sigma^2 = 30$ se extrage un eşantion de volum $n = 70$ pentru care se calculează valoarea medie de selecţie $\bar{x} = 138{,}5$. Cu un nivel de semnificaţie $\alpha = 0{,}02$ să se verifice ipoteza

$$H_0 : m = m_0 = 132$$

faţă de alternativa

$$H_1 : m \neq 132.$$

R. Pentru verificarea acestei opoteze vom calcula

$$U_{obs} = \frac{(\bar{x} - m_0)\sqrt{n}}{2} = 0{,}2106,$$

iar din tabelele funcției Laplace

$$\Phi^*(u_{cr}) = \frac{1-\alpha}{2} = 0{,}49$$

obținem valoarea critică u_{cr}. Avem $u_{cr} = 2{,}33$ și $|U_{obs}| < u_{cr}$, deci acceptăm ipoteza H_0.

IX.29 Se fac 150 probe independente și se obține frecvența relativă $\frac{m}{n} = 0{,}17$.

1°. Cu un nivel de semnificație $\alpha = 0{,}05$, să se verifice ipoteza

$$H_0 : p = p_0 = 0{,}2$$

față de alternativa

$$H_1 : p \neq 0{,}2.$$

2°. Aceeași problemă în alternativa

$$H_1 : p < p_0.$$

R. Pentru a verifica egalitatea probabilității necunoscute p, cu probabilitatea ipotetică p_0, vom calcula cu ajutorul datelor observate

$$U_{obs} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}} = \frac{(0{,}17 - 0{,}2)\sqrt{150}}{\sqrt{0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -0{,}9185$$

$$\Phi(u_{cr}) = \frac{1-\alpha}{2} = 0{,}475$$

și din anexa 1 obținem $u_{cr} = 1{,}96$.

Rezultă $|U_{obs}| < u_{cr}$, deci acceptăm ipoteza H_0.

2°. Ne vom baza pe principiul punctului critic auxiliar.

Avem

$$\Phi(u_{cr}) = \frac{1-2\alpha}{2} = 0{,}45,$$

iar din anexa 1 rezultă $u_{cr} = 1{,}65$. În consecință limita regiunii critice stîngi este $u'_{cr} = -1{,}65$.

Dacă $U_{obs} > u'_{cr}$ acceptăm ipoteza H_0.

Dacă $U_{obs} < u'_{cr}$ respingem ipoteza H_0.

În cazul nostru, $U_{obs} > u'_{cr}$, deci acceptăm H_0.

IX.30 Pentru trei eșantioane de volume $n_1 = 10$, $n_2 = 15$, $n_3 = 20$ extrase dintr-o populație distribuită normal, se determină dispersiile de selecție $s_1'^2 = 4{,}2$, $s_2'^2 = 4{,}5$, $s_3'^2 = 6{,}5$.

1°. Să se verifice ipoteza H_0 de omogenitate a dispersiilor cu un prag de semnificaţie $\alpha = 0{,}05$.

2°. Să se estimeze dispersia populaţiei pe baza datelor experienţei.

R. 1°. Pentru verificarea ipotezei de omogeneitate a dispersiilor vom utiliza criteriul lui Barttett, ($n_i \geqslant 4$, $i = 1, 2, 3$):

$$B_{obs} = \frac{2{,}303\left[k \lg \frac{\sum_{i=1}^{l} k_i s_i'^2}{k} - \sum_{i=1}^{l} k \lg s_i'^2\right]}{1 + \frac{1}{3(l-1)}\left[\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k}\right]} = \frac{V}{C}$$

unde $k = \sum_{i=1}^{l} k_i$, $k_i = n_i - 1$ (numărul de grade de libertate pentru dispersia s_i^2).

Punctul critic $\chi^2_{cr}(\alpha_i, l-1)$ este dat de anexa 2.

Dacă $B_{obs} < \chi^2_{cr}$ se acceptă ipoteza H_0.

Dacă $B_{obs} > \chi^2_{cr}$ se respinge ipoteza H_0.

Avem următorul tabel:

Nr. eşantioane i	Volumul eşantionului n_i	Nr. de grade de libertate k_i	Dispersii $S_i'^2$	$k_i S_i'^2$	$\lg S_i'^2$	$k_i \lg S_i'^2$
1	10	9	4,2	37,8	0,62325	5,60925
2	15	14	4,5	63	0,6532	9,14494
3	20	19	6,5	123,5	0,81291	14,44529
		$k=42$		224,3		29,19948

Rezultă

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{3} k_i s_i'^2}{k} = \frac{224{,}3}{42} \approx 5{,}34\,; \quad \lg \bar{s}^2 = 0{,}72754,$$

$$V = 2{,}303\,[42 \cdot 0{,}72754 - 29{,}19948] = 1{,}3572.$$

Din anexa 4 pentru $\alpha = 0{,}05$ şi $l - 1 = 3 - 1 = 2$ grade de libertate, obţinem $\chi^2_{cr}(0{,}05\,;2) = 6{,}0$.

Ţinînd seama de faptul că $C > 1$ şi că $V < \chi^2_{cr}$ rezultă $B_{obs} < \chi^2_{cr}$, deci se acceptă ipoteza H_0.

2°. Avînd în vedere faptul că la punctul 1° am acceptat omogeneitatea dispersiilor, estimaţia dispersiei va fi dată de media aritmetică a dispersiilor de selecţie ponderată prin numărul de grade de libertate

$$D^2_{gen} = \bar{S}^2 = \frac{\sum k_i S_i'^2}{k} = \frac{224,3}{42} = 5,3404.$$

IX.31. Pentru *8* eşantioane independente de acelaşi volum, $n = 37$, dintr-o populaţie distribuită normal, s-au calculat dispersiile de selecţie $s_1'^2 = 2,3$; $s_2'^2 = 2,57$; $s_3'^2 = 2,96$; $s_4'^2 = 3,2$; $s_5'^2 = 3,61$; $s_6'^2 = 4$; $s_7'^2 = 4,1$; $s_8'^2 = 4,35$.

1°. Să se verifice omogeneitatea dispersiilor cu un prag de semnificaţie $\alpha = 0,01$.

2°. Să se estimeze dispersia generală a populaţiei.

R. 1°. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_8^2$.

Criteriul de verificare a acestei ipoteze este dat de Cochran

$$G_{obs} = \frac{S'^2_{max}}{\sum_{i=1}^{l} s_i'^2}$$

iar din anexa 4 pentru α, $k = n - 1$ grade de libertate şi l = numărul de eşantioane se determină $G_{cr}(\alpha; k; l)$.

Dacă $G_{obs_2} < G_{cr_2}$ se acceptă ipoteza H_0.

Dacă $G_{obs_2} > G_{cr_2}$ se respinge H_0.

Avem

$$G_{obs.} = \frac{4,35}{27,19} = 0,16.$$

Din anexa 4 rezultă $G_{r_2}(0,01; 36,8) = 0,2214$.

Deoarece $G_{obs.} < G_{cr_2}$ acceptăm ipoteza H_0.

2°. Avînd în vedere rezultatul de la punctul 1°

$$D_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} s_i'^2}{8} = \frac{27,19}{8} = 3,398.$$

IX.32. Aplicînd criteriul lui Pearson, să se verifice pentru un nivel de semnificaţie $\alpha = 0,05$; ipoteza concordanţei dintre distribuţia normală a variabilei X şi distribuţia empirică de selecţie de volum $n = 200$:

x_i	4	6	8	10	12	14	16	18	20
n_i	14	24	26	30	26	22	20	13	25

R. Avem

$$\bar{x} = 11{,}91, \quad s^2 = 25{,}15.$$

Vom calcula frecvenţa teoretică prin formula

$$n'_i = \frac{n \cdot h}{\sqrt{s^2}} \varphi(u_i) = \frac{200 \cdot 2}{5{,}014} \varphi(u_i) = 79{,}77\ \varphi(u_i).$$

Valorile funcţiei $\varphi(u)$ sînt date la tabelul următor:

i	x_i	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{s^2}}$	$\varphi(u_i)$	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	4	−1,57	0,1163	9,27	4,73	22,37	2,4
2	6	−1,17	0,2012	16,05	−2,05	4,20	0,2
3	8	−0,78	0,2943	23,47	−9,47	89,68	3,8
4	10	−0,38	0,3712	29,6	−15,06	226,8	7,6
5	12	0,01	0,3989	31,91	−17,91	320,77	10,1
6	15	0,41	0,3668	29,47	−15,47	255,04	8,6
7	16	0,81	0,2874	22,92	− 8,92	79,57	3,4
8	18	1,21	0,1919	15,31	− 1,31	1,72	0,1
9	20	1,61	0,1092	8,71	5,29	27,98	3,2

Pentru verificarea ipotezei calculăm

$$\chi^2_{obs} = \Sigma \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = 39{,}4.$$

Pentru $\alpha = 0{,}05$ şi pentru $k = S - 3 = 9 - 3 = 6$ grade de libertate obţinem $\chi^2_{cr.}(0{,}05\,;\,6) = 12{,}6$.

Deoarece $\chi^2_{obs.} > \chi^2_{cr.}$ se respinge ipoteza concordanţei distribuţiilor.

IX.33. Aplicînd criteriul Pearson să se verifice, pentru un nivel de semnificaţie $\alpha = 0{,}05$, ipoteza concordanţei dintre distribuţia normală a variabilei observate X şi distribuţia empirică, pe baza unei selecţii de volum $n = 100$.

Datele obţinute sînt trecute în tabelul următor:

Numărul intervalelor	Limitele intervalelor		Frecvenţa
i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	−2	3	4
2	3	8	7
3	8	13	16
4	13	18	40
5	18	23	17
6	23	28	7
7	28	33	5
8	33	38	4

R. În acest caz distribuţia empirică este dată sub forma unei succesiuni de intervale de mărimi egale.

Vom calcula valoarea medie de selecţie. Notînd x_i^* mediile aritmetice ale extremităţilor intervalelor

$$\left(x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)$$

avem

x_i^*	0,5	5,5	10,5	15,5	20,5	25,5	30,5	35,5
n_i	4	7	16	40	17	7	5	4

şi

$$\bar{x}^* = 16{,}5.$$

Abaterea medie pătratică $\sigma^* = 7{,}58$ şi $\frac{1}{\sigma^*} = 0{,}132$.

Determinăm apoi probabilităţile teoretice P_i şi frecvenţele teoretice $n_i' = nP_i$ şi datele obţinute le trecem în tabelul următor (v. şi continuarea de la pag. 471):

i	x_i	x_{i+1}	$x_i - \bar{x}^*$	$x_{i+1} - \bar{x}^*$	$z_i = \frac{x_i - \bar{x}^*}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{\sigma^*}$
1	−2	3	—	−13,5	$-\infty$	−1,78
2	3	8	−13,5	−8,5	−1,78	−1,12
3	8	13	−8,5	−3,5	−1,12	−0,46
4	13	18	−3,5	1,5	−0,46	0,19
5	18	23	1,5	6,5	0,19	0,86
6	23	28	6,5	11,5	0,86	1,52
7	28	33	11,5	17,5	1,52	2,31
8	33	38	17,5	—	2,31	$+\infty$

Pentru compararea frecvenţelor empirice şi teoretice cu criteriul Pearson calculăm

$$\chi^2_{obs.} = \sum_i \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 122{,}4399 - 100 = 22{,}4399.$$

Din anexa 2, pentru $\alpha = 0{,}05$ şi $k = s-3 = 8-3 = 5$ grade de libertate (s = nr. intervalelor) obţinem $\chi^2_{cr.}$ (0,05; 5) = 11,1.

Deoarece $\chi^2_{obs.} > \chi^2_{cr.}$ respingem ipoteza potrivit căreia X ar fi repartizată normal.

IX.34. Se verifică 500 lămpi şi distribuţia empirică a duratei de funcţionare este dată de tabelul următor:

Să se verifice ipoteza potrivit căreia timpul de funcţionare a lămpilor este distribuit după o lege exponenţială; $\alpha = 0{,}02$.

Inter. de timp în ore $x_i - x_{i+1}$	n_i
0— 500	150
500—1 000	100
1 000—1 500	85
1 500—2 000	70
2 000—2 500	55
2 500—3 000	40
	$n = 500$

R. Verificarea ipotezei se face cu ajutorul criteriului Pearson.

Durata medie de funcţionare a lămpilor este

$$\bar{x}_m = \frac{\sum x_i^* n_i}{n} = \frac{520\,000}{500} = 1\,040.$$

Parametrul λ al distribuţiei exponenţiale este estimat de

$$\lambda = \frac{1}{\bar{x}_m} = 0{,}0009.$$

Probabilităţile

$$P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}$$

sînt

$$P_1 = 0{,}3616;\ P_2 = 0{,}2318;\ P_3 = 0{,}1470;\ P_4 = 0{,}0944;$$

$\Phi^*(z_i)$	$\Phi^*(z_{i+1})$	$P_i = \Phi^*(z_{i+1}) - \Phi^*(z_i)$	$n'_i = 100\,P_i$	$\frac{n_i^2}{n'_i}$
−0,5000	−0,4625	0,0375	3,75	4,2666
−0,4625	−0,3686	0,0939	9,39	5,2178
−0,3686	−0,1772	0,1914	19,14	13,3751
−0,1772	0,0753	0,2525	25,25	63,3663
0,0753	0,3051	0,2298	22,98	12,5761
0,3051	0,4357	0,1306	13,06	3,7519
0,4357	0,4895	0,0538	5,38	4,6479
0,4895	0,5000	0,0105	1,05	15,2380
		1	100	122,4399

$P_5 = 0{,}0597$; $P_6 = 0{,}0381$, de unde frecvenţele teoretice $n'_1 = n \cdot P_i$ sînt $n'_1 = 180{,}8$; $n'_2 = 115{,}9$; $n'_3 = 73{,}5$; $n'_4 = 47{,}2$; $n'_5 = 30{,}25$; $n'_6 = 19{,}05$.

Deci

$$\chi^2_{obs.} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = 64{,}4.$$

Din anexa 3 pentru $\alpha = 0{,}02$ şi $k = s - 2 = 6-2=4$ grade de libertate, obţinem $\chi^2_{cr.}(0{,}02\,;4) = 11{,}67$.

Deoarece $\chi^2_{obs} > \chi^2_{cr}$, respingem ipoteza.

IX.35. Pentru determinarea calităţii seminţelor de grîu se verifică 1 100 boabe obţinîndu-se următoarea distribuţie empirică (x_i = = nr. de seminţe necorespunzătoare) pentru un eşantion

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	507	360	180	41	7	5

Să se verifice ipoteza H_0 conform căreia variaţiile aleatoare, X — care reprezintă numărul de seminţe necorespunzătoare — are o lege de repartiţie Poisson. Pragul de semnificaţie $\alpha = 0{,}01$.

R. Vom verifica ipoteza dată cu ajutorul criteriului Pearson.

Valoarea medie de selecţie este

$$\bar{x}_m = 0{,}8.$$

Parametrul $\lambda = \bar{x}_m = 0{,}8$.

Se determină cu ajutorul legii Poisson probabilităţile P_i de apariţie în n probe, de i ori a succesului (i=0, 1, 2, ..., r, r = nr. maxim de succese observate, n = volumul eşantionului)

$$P_n(i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!},$$

deci

$$P_{1100}(i) = \frac{(0{,}8)^i e^{-0{,}8}}{i!}.$$

Avem

$$P_0 = P_{1100}(0) = 0{,}4493\,;\quad P_1 = 0{,}3594\,;\quad P_2 = 0{,}1439\,;$$

$$P_3 = 0{,}0383\,;\quad P_4 = 0{,}0076\,;\quad P_5 = 0{,}0012.$$

Frecvenţele teoretice sînt $n'_i = nP_i$;

$$n'_0 = 494{,}23\,;\quad n'_1 = 395{,}34\,;\quad n'_2 = 42{,}53\,;\quad n'_3 = 8{,}58\,;$$

$$n'_4 = 0{,}053\,;\quad n'_5 = 0{,}006.$$

Calculele pentru determinarea lui $\chi^2_{obs.}$ sînt trecute în următorul tabel:

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
0	507	494,23	12,77	163,07	0,3299
1	360	395,34	−35,34	1 248,91	3,1590
2	180	158,29	21,71	471,32	2,9775
3	41	42,13	−1,13	1,27	0,0301
4	7	8,58	−1,58	2,49	0,2902
5	5	6,6	−1,6	2,56	0,3878
Σ	1 100				$\chi^2_{obs.} = 7,17$

Din anexa 4, pentru $\alpha = 0,01$, $k = s - 2 = 6 - 2 = 4$ grade de libertate obținem

$$\chi^2_{cr.}\ (0,01\ ;\ 4) = 13,3.$$

Deoarece $\chi^2_{obs.} < \chi^2_{cr.}$ acceptăm ipoteza.

Capitolul X

ELEMENTE DE PROGRAMARE MATEMATICĂ

Programarea liniară este o metodă matematică care permite analiza diferitelor aspecte ale activităţii economice. Condiţiile în care se desfăşoară activitatea analizată conduc la un sistem de relaţii — ecuaţii sau inecuaţii — care cuprind *variabilele* problemei şi *coeficienţii tehnici* care o caracterizează. Aceste relaţii alcătuiesc *restricţiile* problemei. Obiectivul studiului este *optimizarea* unui anumit rezultat dependent de aceleaşi variabile care figurează şi în restricţii. Acest obiectiv apare sub forma unei funcţii ale cărei valori maxime sau minime le căutăm şi care se numeşte *funcţie obiectiv*, *funcţie de eficienţă* sau *funcţie economică*.

Restricţiile problemei împreună cu funcţia obiectiv constituie modelul matematic al problemei de programare matematică. Dacă sistemul restricţiilor şi funcţia obiectiv sînt funcţii liniare de variabilele problemei, modelul constituie o problemă de programare liniară care sub formă algebrică se scrie:

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \qquad i = k+1, \ldots, p, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m+n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = p+1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m+n,$$

$$[\text{Max}]\ Z = \sum_{j=1}^{m+n} c_j x_j \text{ sau } [\text{Min}]\, Z = \sum_{j=1}^{m+n} c_j x_j, \tag{4}$$

unde coeficienţii $a_{ij}(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n + m)$, $b_i(i = 1, 2, \ldots, m)$ şi $c_j(j = 1, 2, \ldots, m + n)$ sînt numere reale asupra cărora nu facem nici o ipoteză particulară. Coeficienţii a_{ij} se numesc şi *coeficienţi tehnici* şi sînt stabiliţi pe baza fenomenului studiat. Dacă aceşti coeficienţi sînt şi rămîn constanţi într-un interval de timp determinat, avem de studiat o problemă de *programare liniară*. Dacă coeficienţii tehnici variază şi aceste variaţii pot fi exprimate ca funcţii de unul sau mai mulţi parametri, avem o problemă de *programare parametrică*. Dacă a_{ij} sînt variabile aleatoare atunci avem o problemă de *programare stochastică*.

Variabilele $x_j(j = 1, 2, \ldots, m + n)$ reprezintă *nivelul la care trebuie desfăşurate activităţile* $j = 1, 2, \ldots, m + n$, şi este evident că nici o activitate nu poate fi desfăşurată la un nivel negativ.

Toate inecuaţiile sistemului de restricţii pot fi transformate în egalităţi prin adunarea sau scăderea unor variabile nenegative numite *variabile de abatere*. Aceste modificări conduc la *forma standard* a problemei care poate fi scrisă sub formă matriceală:

$$AX = B, \tag{5}$$

$$CX = Z, \tag{6}$$

unde

$$A = \| a_{ij} \|, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n+m} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{Vmatrix}, \quad C = \| c_1, c_2, \ldots, c_{n+m} \|.$$

Numim *soluţie* a problemei orice sistem de valori ale variabilelor $x_j(j = 1, \ldots, m + n)$ care satisfac relaţiile (1), (2) şi (3).

Dacă toate variabilele x_j sînt nenegative, dispunem de o *soluţie realizabilă* sau de un program de activitate.

Numim *soluţie realizabilă de bază* (soluţie de bază) mulţimea de m cantităţi $x_i(x_i \geqslant 0)$ şi n cantităţi $x_j(x_j = 0)$ care satisfac (5).

Numim *soluţie de bază optimă* (soluţie optimală) soluţia de bază care optimizează funcţia economică.

Pentru rezolvarea problemelor de programare liniară s-au construit mai multe algoritme : *algoritmul primal, algoritmul dual, primal-dual, algoritmul simplex sau metoda Dantzig* etc.

Algoritmul simplex primal pleacă de la ipoteza că se cunoaşte o soluţie iniţială de bază a problemei de programare liniară şi oferă posibilitatea de a îmbunătăţi soluţia, înlocuind în fiecare iteraţi cîte un singur vector de bază, pînă la obţinerea soluţiei optime, sau de a dovedi că nu există soluţie optimă.

Presupunem că avem o soluţie de bază cuprinzînd m variabile nenegative şi nu toate nule, x_i, numărabile de la $n+1$ la $n+m$. Putem scrie

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} A_i x_i = B, \tag{7}$$

$$Z = \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i x_i, \tag{7'}$$

cu $x_i \geqslant 0$, $(i = n+1, \ldots, m+n)$, $B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{Vmatrix}$ şi A_i fiind m vectori coloane din matricea A. Ceilalţi n vectori A_j, $j = 1, \ldots, n$, pot fi exprimaţi liniar în funcţie de m vectori A_i care constituie o bază a spaţiului vectorial m-dimensional :

$$A_j = \sum_{i=n+1}^{m+n} x_{ij} A_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Coeficienţii x_{ij} se pot calcula prin inversiunea matricei pătrate formate din cei m vectori de bază A_i. Avem

$$Z_j = \sum_{i=n+1}^{m+n} x_{ij} c_i, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Fie θ un scalar pozitiv. Alegînd unul din vectorii A_j care nu sînt în bază, putem scrie

$$\theta A_j = \sum_{i=n+1}^{n+m} \theta x_{ij} A_i,$$

de unde o nouă expresie a lui (7)

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} A_i x_i = B = \sum_{i=n+1}^{n+m} (x_i - \theta x_{ij}) A_i + \theta A_j \tag{10}$$

iar din (7') prin adăugarea cantităţilor $\theta(c_j - Z_j)$ obţinem

$$Z + \theta(c_j - Z_j) = \sum_{i=1+m}^{n+m} c_i x_i + \theta(c_j - Z_j) \tag{11}$$

şi după (9)

$$\theta Z_j = \sum_{i=n+1}^{n+m} \theta x_{ij} c_i.$$

Rezultă

$$Z + \theta(c_j - Z_j) = \sum_{i=n+1}^{n+m} (x_i - \theta x_{ij}) c_i + \theta c_j. \tag{12}$$

Dacă cel puţin un $x_{ij} > 0$, putem alege $\theta > 0$, astfel ca

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ij}}. \tag{13}$$

Toţi $x_i - \theta x_{ij}$ sînt pozitivi, afară de unul care este nul şi corespunde lui θ_0. A tunci scoatem din bază vectorul A_i astfel ca

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ij}},$$

întrucît coeficientul său se anulează după (10). El va fi înlocuit prin vectorul A_j de coeficient θ_0. Noua soluţie de bază astfel obţinută este distinctă de precedenta şi ei îi corespunde o mărire a valorii funcţiei economice (în caz de maximizare) dacă $c_j - Z_j > 0$.

În concluzie *criteriul de intrare în bază* a unui vector A_j este ca acestui vector să-i corespundă diferenţa $c_j - Z_j > 0$.

Dacă nu există cantităţi $c_j - Z_j > 0$, maximul funcţiei economice este atins. Cantităţile $c_j - Z_j$ se mai numesc şi *costuri marginale.*

Dacă există o diferenţă $c_j - Z_j > 0$ şi vectorul A_j are componente pozitive, soluţia poate fi îmbunătăţită.

O soluţie de bază realizabilă a unei probleme de programare liniară este un vector care verifică sistemul restricţiilor şi are un număr de componente strict pozitive, cel mult egal cu numărul de restricţii din sistem. Dacă numărul acestor componente strict pozitive este mai mic decît cel al restricţiilor, soluţia este o *soluţie degenerată de bază.*

Programele :

$$[\text{Max}]\ g = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad [\text{I}]$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

şi

$$[\text{Min}]\ f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \qquad [\text{II}]$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

se numesc *duale* şi au proprietatea următoare :

$$\max g = \min f.$$

Costurile marginale $(c_j - Z_j)$ ale primului program dau soluţia programului al doilea şi reciproc.

Din punct de vedere teoretic *metoda tablourilor* este un procedeu direct prin care metoda simplex şi criteriul lui Dantzig sînt utilizate pentru selecţionarea în fiecare iteraţie a vectorului care intră în bază şi a celui care este scos din bază. Îmbunătăţirea esenţială constă în faptul că în fiecare iteraţie se revine la o matrice de bază unitară ceea ce elimină calculele plictisitoare.

În cazul ecuaţiilor cînd nu se poate pune în evidenţă o soluţie de bază se procedează astfel :

1°. Funcţia economică este transformată prin adăugarea de m variabile ai căror coeficienţi se iau egali şi foarte mari dar neapărat de semn negativ. Se asigură astfel că soluţia corespunzătoare maximului nu conţine aceste variabile.

2°. Se adaugă aceste variabile (variabile artificiale) restricţilor ca şi în cazul inecuaţiilor, neafectînd semnul corespunzător membrului al doilea. Este cert că aceste variabile sînt nule pentru maxim.

3°. Se procedează apoi ca pentru inecuaţii.

Pentru efectuarea primei iteraţii, se adaugă liniei coeficienţilor funcţiei economice diferite linii ale matricei multiplicate cu M astfel ca să apară zero sub matricea unitate. Altfel spus, se adaugă fiecărui c_i cantitatea

$$(a_{1i} + a_{2i} + \cdots + a_{mi})M$$

şi lui Z cantitatea

$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_m)M.$$

Apoi se selecţionează vectorul A care intră în bază ţinînd seama de cantitatea M.

Programare parametrică

O categorie de probleme de programare parametrică este formată de problemele în care termenii liberi din sistemul restricţiilor depind de unul sau mai mulţi parametri. Din punct de vedere economic aceşti termeni pot reprezenta cererea de produse sau resursele disponibile.

Rezolvarea problemelor, în care vectorul cerere b (vectorul care are drept componente cererile de produse) este parametrizat, constă în determinarea soluţiilor optime corespunzătoare diferitelor valori ale parametrilor de care depinde acest vector.

Indiferent de modul în care este parametrizat vectorul b, dacă soluţia asociată unei baze este optimă pentru anumite valori ale parametrilor, ea poate deveni nerealizabilă pentru alte valori, dar rămîne dual-realizabilă. Această observaţie reduce studiul optimalităţii bazei asociate unei soluţii dual-realizabile la determinarea condiţiilor în care soluţia dată este realizabilă.

Rezolvarea problemelor de programare parametrică constă în:

— determinarea intervalelor în care problema admite aceeaşi bază optimă;

— determinarea bazelor optime asociate fiecărui interval.

Fenomene de aşteptare

Vom da acum elementele esenţiale ale unui model de aşteptare.

1. **Veniri.** Acestea sînt presupuse, în general, ca fiind întîmplătoare şi independente. Deci, probabilitatea ca să se producă o venire a unei unităţi este independentă de timpul şi de numărul de unităţi deja ajunse la staţia de serviciu sau de cele ce vor veni.

Probabilitatea ca să se producă o venire în intervalul de timp $(t, t + dt)$ este *dată de* $\frac{1}{\lambda}$, ($\lambda = \text{const}$). Această constantă λ indică numărul mediu de veniri în unitatea de timp dt. În cele mai multe cazuri se presupune că venirile urmează o *lege Poisson*. Avem

$$\lambda = \frac{T}{a},$$

unde T este o unitate de timp şi a media lungimii intervalelor de timp dintre două veniri consecutive.

2. **Timpul de serviciu** este dat de variabilele aleatoare în general independente care pot urma o repartiţie exponenţială negativă, o lege constantă, o lege χ^2, sau o lege oarecare.

3. **Factorul de serviciu** (intensitate de trafic) este raportul care indică, în medie, numărul de unităţi care vin în perioada unui singur timp de serviciu. O dată stabilită repartiţia timpului de serviciu, toate caracteristicile modelului de aşteptare studiat se vor exprima în funcţie de acest parametru.

4. **Staţii de serviciu.**

5. **Disciplina aşteptării.** Aceasta precizează modul în care se dispun unităţile în şirul de aşteptare şi ordinea în care sînt servite.

Şir de aşteptare cu mai multe staţii.

Notăm :

S — numărul de staţii ;

ν — numărul de unităţi în şirul de aşteptare ;

j — numărul de unităţi în curs de servire în staţii ($0 \leqslant j \leqslant S$) ;

n — numărul total de unităţi din sistem, adică în şir şi în staţii : $n = \nu + j$;

ρ — numărul de staţii libere ;

$\bar{n}$, $\bar{\nu}$, $\bar{j}$, $\bar{\rho}$ — valorile medii corespunzătoare lui n, ν, j, ρ ;

t — timpul mediu de aşteptare în şir înainte de servire.

Ecuaţiile modelului de aşteptare sînt :

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda - n\mu) p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \quad 1 \leqslant n < S,$$

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + S\mu) p_n(t) + S\mu p_{n+1}(t), \quad n > S,$$

$p_n(t)$ fiind probabilitatea ca la momentul t să avem n unităţi în sistem.

Aceste ecuaţii nu sînt decît un caz particular al ecuaţiilor mai generale care definesc ceea ce se numeşte un „proces de naştere şi de moarte" în care sosirile (venirile) şi serviciul sînt poissoniene

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t), \quad n > 0 \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t),$$

unde λ_n şi μ_n sînt funcţii de n.

Notăm $\Psi = \frac{\lambda}{\mu}$. Cantitatea Ψ/S se numeşte intensitatea de trafic în staţie.

a) Probabilitatea p_n a unui număr de n unităţi în sistem :

$$p_n = p_0 \frac{\Psi^{-n}}{n!}, 1 \leqslant n < S,$$

$$p_n = p_0 \frac{\Psi^n}{S!S^{n-S}}, \; n \geqslant S,$$

de unde

$$p_0 = \frac{1}{\frac{\Psi^S}{S(1-\Psi/S)} + 1 + \frac{\Psi}{1} + \frac{\Psi^2}{2!} + \cdots + \frac{\Psi^{S-1}}{(S-1)!}}$$

b) Numărul mediu de unităţi n în sistem :

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n,$$

$$\bar{n} = \left[\Psi + 2\frac{\Psi^2}{2!} + \cdots + S\frac{\Psi^S}{S!} + (S+1)\frac{\Psi^{S+1}}{S!(S-\Psi)} + \frac{\Psi^{S+2}}{S!(S-\Psi)^2}\right] p_0.$$

c) Numărul mediu de unităţi $\bar{\nu}$ în şirul de aşteptare :

$$\bar{\nu} = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S) p_n,$$

$$\bar{\nu} = \frac{\Psi^{S+1}}{S \cdot S!(1-\Psi/S)^2} p_0.$$

d) Numărul mediu ρ de staţii libere :

$$\bar{\rho} = \sum_{n=0}^{S} (S-n) p_n = S - \Psi.$$

Avem

$$\bar{n} = \bar{\nu} + S - \bar{\rho} = \bar{\nu} + \Psi.$$

e) Probabilitatea de aşteptare $p(>0)$:

$$p(>0) = P(n \geqslant S) = \sum_{n=s}^{\infty} p_n,$$

$$p(>0) = \frac{\Psi^s}{S!(1-\Psi/S)} p_0.$$

f) Timpul mediu de aşteptare $\bar{t}_f$ în şir :
în regim permanent avem

$$\bar{\nu} = \lambda \bar{t}_f,$$

de unde

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda} = \frac{\Psi^S}{S \cdot S!\mu(1-\Psi/S)^2} p_0.$$

Şir de aşteptare cu mai multe staţii şi număr limitat de clienţi.
a) Probabilitatea p_n a unui număr de n unităţi în sistem.
Ecuaţiile generale (14) ne dau :

$$p_n = C_m^n \Psi^n p_0, \quad 0 \leqslant n \leqslant S,$$

$$p_n = \frac{n!}{S!S^{n-S}} C_m^n \Psi^n p_0, \quad S \leqslant n \leqslant m,$$

cu $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$. Punînd $a_n = \frac{p_n}{p_0}$ avem

$$a_0 = 1,$$

$$a_n = \frac{m-n+1}{n} \Psi a_{n-1}, \quad 1 \leqslant n \leqslant S-1,$$

$$a_n = \frac{m-n+1}{n} \Psi a_{n-1}, \quad S \leqslant n \leqslant m,$$

de unde

$$p_0 = \frac{1}{1 - \sum_{n=1}^{m} a_n}$$

În cazul cu o staţie unică, formulele utilizate sînt

$$p_n = \frac{m!}{(m-n)!} \Psi^n p_0,$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{m!\Psi^n}{(m-n)!}}$$

şi $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1.$

Avem formula de recurenţă

$$p_n(m - n + 1)\Psi p_{n-1}, \quad 1 \leqslant n \leqslant m.$$

b) Numărul de unităţi în şir, de staţii neocupate şi de unităţi în sistem :

$$\bar{\nu} = \sum_{n=S+1}^{m} (n - S)p_n ;$$

$$\bar{\rho} = \sum_{n=0}^{S} (S - n)p_n,$$

$$\bar{n} = S + \bar{\nu} - \bar{\rho}.$$

În cazul cu staţia unică ($S = 1$) formulele utilizate sînt

$$\bar{\nu} = m - \frac{1 + \Psi}{\Psi}(1 - p_0),$$

$$\bar{\rho} = p_0,$$

$$\bar{n} = m - \frac{1}{\Psi}(1 - p_0).$$

c) Probabilitatea de aşteptare şi timpul mediu de aşteptare în şir :

$$p(>0) = P(n \geqslant S) = \sum_{n=S}^{m} p_n,$$

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda(m - \bar{n})} = \frac{1}{\lambda(m - \bar{n})} \sum_{n=S+1}^{m} (n - S)p_n = \frac{\bar{\nu}}{\mu(S - \bar{\rho})}$$

Probleme de stocaj

Principalele elemente care intervin într-o *gestiune de stocaj* sînt :

— cererea de r articole care poate fi determinată (spre exemplu proporţională cu timpul) sau aleatoare,

— amînarea livrării τ care poate fi determinată sau aleatoare sau dependentă de volumul de comandă de reaprovizionare ;

— diferite nivele de stoc : nivel maximal, capacitate limitată de stocaj, nivel minimal, nivel de atenţie, nivel de reaprovizionare;

— diferite costuri :

cost de stocaj C_s, socotit pe articol sau pe unităţi de timp ; cost de lansare C_l reprezintă cheltuielile administrative ale operaţiei de reaprovizionare;

cost de pierdere C_1 după articolele soldate cînd cererea r este inferioară stocului s;

cost suplimentar C_2 pentru aprovizionare specială dacă cererea este superioară stocului s;

— volumul de comenzi de reaprovizionare n, care poate fi constant sau variabil după regula de gestiune adoptată;

— datele de reaprovizionare t şi perioadele de gestiune T sînt de asemenea constante sau variabile după regula de gestiune adoptată.

1° *Gestiune cu perioadă fixă şi cerere constantă*

Costul de lansare a unei comenzi — sau şarje — C_l este independent de numărul de articole. Cererea totală pentru un interval de timp θ este N.

Costul total pentru o şarjă este

$$C_l + \frac{1}{2} nTC_s.$$

Dacă h este cererea pe unitatea de timp avem

$$n = hT \text{ şi } \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}.$$

Costul global pentru intervalul de timp θ este

$$\Gamma(n) = \left(C_l + \frac{1}{2} nTC_s\right)\frac{N}{n} = \frac{NC_l}{n} + \frac{\theta C_s}{2} n.$$

Costul global este minim pentru

$$n = n_0 = \sqrt{2\frac{N}{\theta} \cdot \frac{C_l}{C_s}}.$$

Se deduce că

$$T = T_0 = \frac{\theta}{N} n_0 = \sqrt{2\frac{\theta}{N}\frac{C_l}{C_s}},$$

$$\Gamma_0 = \Gamma(n_0) = \sqrt{2N\theta C_l C_s}.$$

2° *Gestiune cu perioadă fixă şi comandă constantă cu posibilităţi de pierdere.*

Cosul de stocare a unei şarje : $\frac{1}{2} sT_1C_s$.

Costul de lansare a unei şarje C_l.

Costul de pierdere pentru o şarjă : $\frac{1}{2}(n - S)T_2C_p$.

Costul global pentru intervalul de timp θ este

$$\Gamma(n, s) = \left[\frac{1}{2} sT_1C_s + C_l + \frac{1}{2}(m - s)T_2C_p\right]\frac{N}{n}.$$

Avem

$$\frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}, \; T_1 = \frac{s}{n} T, \; T_2 = \frac{n - s}{n} T,$$

deci

$$\Gamma(n, s) = \frac{s^2\theta C_s}{2} + \frac{N}{n} C_l + \frac{(n - s)^2\theta}{2n} C_p.$$

Această funcţie de două variabile este minimă pentru

$$n = n_0 = \sqrt{2\frac{N}{\theta} \cdot \frac{C_l}{C_s}}\sqrt{\frac{C_s + C_p}{C_p}},$$

$$s = s_0 = n_0 \frac{C_p}{C_s + C_p}.$$

Rezultă

$$T_0 = \sqrt{2\frac{\theta}{N} \cdot \frac{C_l}{C_s}}\sqrt{\frac{C_s + C_p}{C_p}}\;;\; \Gamma_0 = \sqrt{2N\theta C_sC_l}\sqrt{\frac{C_p}{C_s + C_p}}.$$

3° *Gestiune cu perioadă fixă şi cerere aleatoare cu posibilităţi de pierdere.*

Fie $p(r)$ probabilitatea unei cereri totale r. Valoarea medie a costului total al stocului pentru o perioadă T este

$$\Gamma(s) = TC_s \sum_{r=0}^{s}\left(s - \frac{r}{2}\right)p(r) + TC_s \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{s^2}{r} p(r) +$$

$$+ TC_p \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{(r - s)^2}{r} p(r).$$

Minimul are loc pentru o valoare s_0 astfel ca

$$L(s_0 - 1) < \rho < L(s_0)$$

unde $\rho = \frac{C_p}{C_s + C_p}$ şi

$$L(s) = p(r \leqslant s) + \left(s + \frac{1}{2}\right) \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{p(r))}{r},$$

$$p(r \leqslant s) = p(0) + p(1) + p(2) + \cdots + p(s).$$

PROBLEME

X.1. Să se determine

$$[\text{Max}]\, Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \tag{1}$$

cu restricţiile

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_3 - x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 &= -12 \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 4 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

R. Matricea sistemului de restricţii este

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

iar matricea (A, B) este

$$(A, B) = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Avem rang A = rang $(A, B) = 3$, deci sistemul (2) este compatibil. Considerăm o soluţie de bază, arbitrar aleasă; fie aceasta

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{7}{2},\ x_4 = 4,\ x_5 = \frac{1}{2}.$$

Acestei soluţii îi corespunde valoarea lui Z:

$$Z = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{7}{2} + 1 \cdot 4 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 10.$$

Fie vectorii A_i ($i = 3, 4, 5$) liniar independenţi. Putem deci considera că o bază a spaţiului condiţiilor este formată din aceşti vectori. Avem

$$A_j = \sum_{i=3}^{5} x_{ij} A_i, \quad (j = 1, 2)$$

sau

$$\begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{51} & x_{52} \end{Vmatrix}$$

De aici obţinem pentru coeficienţii x_{ij} valorile

$$\begin{Vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \\ x_{51} & x_{52} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Cantităţile Z sînt date de relaţiile

$$Z_j = \sum_{i=1}^{3} x_{ij} c_i, \quad (j = 1, 2).$$

Rezultă

$$\|Z_1 Z_2\| = \|1 \ 1 \ 5\| \cdot \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{19}{3} & \frac{8}{3} \end{Vmatrix}.$$

Cantităţile $\Delta_j = c_j - Z_j$ corespunzătoare sînt

$$c_1 - Z_1 = 3 + \frac{19}{3} = \frac{28}{3}; \quad c_2 - Z_2 = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Avînd o diferenţă pozitivă, soluţia aleasă nu este optimă.

Vom încerca să determinăm o soluţie realizabilă de bază. Pentru $j = 1$ diferenţa $c_1 - Z_1$ este pozitivă, deci introducem un coeficient nenul pentru vectorul A_1. Pentru determinarea acestui coeficient calculăm rapoartele $\frac{x_i}{x_{ij}}$ şi alegem indicele i pentru care obţinem cea mai mică valoare pozitivă.

$$\frac{x_3}{x_{31}} = \frac{7}{3}, \quad \frac{x_4}{x_{41}} = -12, \quad \frac{x_5}{x_{51}} = -\frac{1}{3},$$

deci $\theta_0 = \frac{7}{3}$. Noua soluție este

$$x_1' = \theta_0 = \frac{x_3}{x_{31}} = \frac{7}{3},\ x_2' = 0,\ x_3' = 0,$$

$$x_4' = x_4 - \frac{x_3}{x_{31}} \cdot x_{41} = \frac{43}{9},\ x_5' = x_5 - \frac{x_3}{x_{31}} \cdot x_{51} = 4.$$

Pentru această soluție valoarea lui Z este

$$Z = 3 \cdot \frac{7}{3} + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{43}{9} + 5 \cdot 4 = 31 + \frac{7}{9}.$$

Se verifică că

$$Z = Z_0 + \theta_0(c_1 - Z_1) = 10 + \frac{7}{3} \cdot \frac{28}{3} = 31 + \frac{7}{9}$$

și

$$\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{7}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{43}{9} \\ 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ -12 \\ 4 \end{Vmatrix}.$$

Transformarea dată de vectorii 2 și 3 este

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{42} & x_{43} \\ x_{52} & x_{53} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{matrix} (2) & (3) & & (1) & (4) & (5) \end{matrix}$$

De aici rezultă

$$\begin{Vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{42} & x_{43} \\ x_{52} & x_{53} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -2/9 & 2/9 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\| Z_2 Z_3 \| = \| 3 \quad 1 \quad 5 \| \cdot \begin{Vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -2/9 & 2/9 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{52}{9} & \frac{65}{9} \end{Vmatrix}.$$

Cantitățile Δ_j corespunzătoare sînt

$$c_2 - Z_2 = -\frac{34}{9} < 0,\ c_3 - Z_3 = -\frac{56}{9} < 0.$$

Aceste cantități fiind negative, rezultă că soluția găsită este optimă, iar valoarea lui

$Z = 31 + \frac{7}{9}$ obţinută pentru

$$x_1 = \frac{7}{3},\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{43}{9},\ x_5 = 4$$

corespunde maximului.

X.2. 1° Să se determine prin metoda simplex

$$[\text{Max}]\ Z = 60x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 90x_4$$

supusă la condiţiile

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leqslant 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leqslant 1. \end{aligned}\right\}$$

2° Să se dea programul dual.

3° Care este soluţia optimă a programului dual considerat la punctul 2°?

4° Înlocuind ultima inecuaţie prin

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 1,$$

care este maximul lui Z?

R. 1° În membrul întîi al inecuaţiilor sistemului se adaugă variabilele de abatere x_5, x_6 şi x_7 şi se obţine sistemul

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

adică

$$\begin{array}{c} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \end{array} \end{array} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

O soluţie evidentă este

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,\ x_5 = 15,\ x_6 = 1,\ x_7 = 1;$$

ea dă pentru funcţia economică valoarea $Z = 0$.

Baza este constituită de vectorii-coloane (5), (6) şi (7). Putem scrie

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 10 & 15 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} \\ x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} \end{Vmatrix}.$$

$$\begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (5) & (6) & (7) \end{matrix}$$

De aici rezultă

$$\begin{Vmatrix} x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} \\ x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 10 & 15 \end{Vmatrix} = \| a \|.$$

În acest caz particular obţinem

$$\| Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \| = \| Z_5 Z_6 Z_7 \| \cdot \| a \| = \| 0 \ 0 \ 0 \ 0 \|,$$

deoarece

$$\| Z_5 Z_6 Z_7 \| = \| 0 \ 0 \ 0 \|.$$

Se deduce

$$\begin{aligned} c_1 - Z_1 &= 60 - 0 = 60, \\ c_2 - Z_2 &= 60 - 0 = 60, \\ c_3 - Z_3 &= 90 - 0 = 90, \\ c_4 - Z_4 &= 90 - 0 = 90. \end{aligned}$$

Examinarea acestor rezultate permite constatarea că se poate alege între introducerea coloanei (3) sau (4) în bază.

1) Presupunem că introducem în bază pe A_3; avem

$$\frac{x_i}{x_{i3}} : \frac{x_5}{x_{53}} = \frac{15}{1}, \ \frac{x_6}{x_{63}} = \frac{1}{3}, \ \frac{x_7}{x_{73}} = \frac{1}{10},$$

de unde deducem că trebuie să scoatem din bază pe A_7.

2) Dacă introducem în bază pe A_{42} avem

$$\frac{x_i}{x_{i4}} : \frac{x_5}{x_{54}} = \frac{15}{1}, \ \frac{x_6}{x_{64}} = \frac{1}{2}, \ \frac{x_7}{x_{74}} = \frac{1}{15},$$

de unde rezultă că trebuie scos din bază tot A_7. Dar

$$Z = Z_0 + \theta_0 (c_j - Z_j)$$

aici, cu $c_j - Z_j = 90$; trebuie ales deci θ_0 cît mai mare pentru a mări valoarea funcţiei economice. Prin urmare, se introduce A_3, astfel ca

$$Z = 0 + \frac{1}{10} \cdot 90 = 9.$$

Avem pentru noua soluţie

$$x_1' = 0, \ x_2' = 0, \ x_3' = \theta_0 = \frac{1}{10}, \ X_4' = 0,$$

$$x_5' = x_5 - \theta_0 x_{53} = 15 - \frac{1}{10} = \frac{149}{10},$$

$$x_6' = x_6 - \theta_0 x_{63} = 1 - \frac{1}{10} \cdot 3 = \frac{7}{10}, \ x_7' = 0.$$

Verificînd, obținem

$$90x_3' = 90 \cdot \frac{1}{10} = 9.$$

Schimbarea de bază realizată permite scrierea sistemului sub forma

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{10} \\ 0 \\ \frac{149}{10} \\ \frac{7}{10} \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Cu noua bază (5), (6), (3) se poate calcula

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 15 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_{51} & x_{52} & x_{57} & x_{54} \\ x_{61} & x_{62} & x_{67} & x_{64} \\ x_{31} & x_{32} & x_{37} & x_{34} \end{Vmatrix}.$$

$$\begin{matrix} (1) & (2) & (7) & (4) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (5) & (6) & (3) \end{matrix}$$

Avem

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 15 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 7/10 & 5/10 & -1/10 & -5/10 \\ 61/10 & 35/10 & -3/10 & -25/10 \\ 3/10 & 5/10 & 1/10 & 15/10 \end{Vmatrix} = \|b\|$$

și

$$\|Z_1Z_2Z_7Z_4\| = \|Z_5Z_6Z_3\| \cdot \|b\| = \|0 \quad 0 \quad 90\| \cdot \|b\| = \|27 \quad 45 \quad 9 \quad 135\|.$$

Se calculează apoi

$$\begin{aligned} c_1 - Z_1 &= 60 - 27 = 33, \\ c_2 - Z_2 &= 60 - 45 = 15, \\ c_7 - Z_7 &= 0 - 9 = -9, \\ c_4 - Z_4 &= 90 - 135 = -45. \end{aligned}$$

Aceste rezultate conduc la concluzia că trebuie să introducem în noua bază pe A_1.

Calculînd rapoartele $\frac{X_i}{X_{i_1}}$, obținem

$$\frac{x_i}{x_{i1}} : \frac{x_3}{x_{31}} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x_5}{x_{51}} = \frac{149}{7}, \quad \frac{x_6}{x_{61}} = \frac{7}{61};$$

rezultă că trebuie să scoatem pe A_6.

Fără dificultate se obține

$$x_1' = \theta_0 = \frac{7}{61},\ x_2' = 0,\ x_3' = x_3 - \theta_0 \cdot x_{31} = \frac{1}{10} - \frac{7}{61} \cdot \frac{3}{10} = \frac{4}{61},\ x_4' = 0.$$

$$x_5' = x_5 - \theta_0 \cdot x_{51} = \frac{149}{10} - \frac{7}{61} \cdot \frac{7}{10} = \frac{904}{61},\ x_6' = 0,\ x_7' = 0.$$

Pentru funcția economică avem

$$Z = Z_1 + \theta_0(c_1 - Z_1) = 9 + \frac{7}{61} \cdot 33 = \frac{780}{61}.$$

Sistemul se scrie sub forma

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| ; \left\| \begin{matrix} 7/6 \\ 0 \\ 4/6 \\ 0 \\ 904/6 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| .$$

Cu noua bază (5), (1), (3) avem

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 15 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_{56} & x_{52} & x_{57} & x_{54} \\ x_{16} & x_{12} & x_{17} & x_{14} \\ x_{36} & x_{32} & x_{37} & x_{34} \end{matrix} \right\| ,$$
$$\begin{matrix} (6) & (2) & (7) & (4) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (5) & (1) & (3) \end{matrix}$$

de unde

$$\left\| \begin{matrix} x_{56} & x_{52} & x_{57} & x_{54} \\ x_{16} & x_{12} & x_{17} & x_{14} \\ x_{36} & x_{32} & x_{37} & x_{34} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 7/61 & 6/61 & -4/61 & -13/61 \\ 10/61 & 35/61 & -3/61 & -25/61 \\ -3/61 & 20/61 & 7/61 & 99/61 \end{matrix} \right\| = \|c\|$$

și $\|Z_6 Z_2 Z_7 Z_4\| = \|Z_5 Z_1 Z_3\| \cdot \|c\| = \|0\ \ 60\ \ 90\| \cdot \|c\| =$

$$= \|\ 330/61\ \ \ 3900/61\ \ \ 45/61\ \ \ 7410/61\ \|.$$

Cantitățile $\Delta_j = c_j - Z_j$ corespunzătoare sînt

$$c_6 - Z_6 = -\frac{330}{61},\ c_7 - Z_7 = -\frac{450}{61},$$

$$c_2 - Z_2 = 60 - \frac{3\,900}{61} = -\frac{240}{61},\ c_4 - Z_4 = 90 - \frac{7\,410}{61} = -\frac{1920}{61}.$$

Cantitățile sînt toate negative, deci soluția este optimă

$$x_1 = \frac{7}{61},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{4}{6},\ x_4 = 0,\ x_5 = \frac{904}{61},\ x_6 = 0,\ x_7 = 0$$

cu

$$Z = \frac{780}{61}.$$

2° Programul dual se scrie astfel

	x_1	x_2	x_3	x_4	
y_1	1	1	1	1	15
y_2	7	5	3	2	1
y_3	3	5	10	15	1
	60	60	90	90	

Restricţiile sînt

$$\begin{aligned} y_1 + 7y_2 + 3y_3 &\geqslant 60, \\ y_1 + 5y_2 + 5y_3 &\geqslant 60, \\ y_1 + 3y_2 + 10y_3 &\geqslant 90, \\ y_1 + 2y_2 + 15y_3 &\geqslant 90. \end{aligned}$$

Funcţia economică este

$$[\text{Min}]\ F = 15y_1 + y_2 + y_3.$$

3° Se ştie că soluţia este min $F = \frac{780}{61}$ şi că rezultatul se obţine începînd cu programul primal

Variabilele duale	$-y_4$	$-y_5$	$-y_6$	$-y_7$	y_1	y_2	y_3
Variabilele primale	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Valorile primale	$\frac{7}{61}$	0	$\frac{4}{61}$	0	$\frac{904}{61}$	0	0
Costuri marginale	0	$\frac{240}{61}$	0	$\frac{1920}{61}$	0	$\frac{330}{61}$	$\frac{450}{61}$

Valorile variabilelor programului dual sînt

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{330}{61}, \quad y_3 = \frac{450}{61}.$$

4° Rezultatul este acelaşi deoarece $x_7 = 0$.

X.3. Să se calculeze

$$[\text{Min}]\, Z = 15x_1 + 33x_2$$

cu restricţiile

$$\left.\begin{aligned} 3\,x_1 + 2\,x_2 &\geqslant 6 \\ 6\,x_1 + x_2 &\geqslant 6 \\ x_2 &\geqslant 1 \end{aligned}\right\}, \quad x_j \geqslant 0, \quad (j = 1, 2).$$

R. Cu variabilele de abatere x_3, x_4, x_5 se obţine sistemul

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ 6x_1 + x_2 - x_4 &= 6 \\ x_2 - x_5 &= 1 \end{aligned}\right\}, \quad x_j \geqslant 0.$$

Pornim cu soluţia arbitrară

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1.$$

$$Z = 15 \cdot \frac{2}{3} + 33 \cdot 2 = 76.$$

$$\begin{array}{c} \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{array} \end{array} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{array}{cc} (3) & (4) \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (5) \end{array} \end{array} \begin{Vmatrix} x_{13} & x_{14} \\ x_{23} & x_{24} \\ x_{53} & x_{54} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1/9 & 2/9 \\ -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{Vmatrix},$$

$$\| Z_3 \; Z_4 \| = \| 15 \; 33 \; 0 \| \cdot \begin{Vmatrix} 1/9 & -2/9 \\ -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{61}{3} & \frac{23}{3} \end{Vmatrix},$$

$$c_3 - Z_3 = \frac{61}{3}, \quad c_4 - Z_4 = -\frac{23}{3}.$$

Alegem deci $j = 4$:

$$x_1' = x_1 - \frac{x_5}{x_{54}} x_{14} = \frac{2}{3} - 3 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{3},$$

$$x_2' = x_2 - \frac{x_5}{x_{54}} x_{24} = 2 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 1,$$

$$x_3' = 0, \; x_4' = \frac{x_5}{x_{54}} = 3, \; x_5' = 0.$$

Cu aceste valori funcţia economică este

$$Z = 15 \cdot \frac{4}{3} + 33 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 53.$$

Verificare:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

$$Z = Z_0 + \theta_0(c_4 - Z_4) = 76 + 3 \cdot \left(-\frac{23}{3}\right) = 53.$$

Căutăm o nouă soluție:

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_{13} & x_{15} \\ x_{23} & x_{25} \\ x_{43} & x_{45} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix};$$

$$\begin{matrix} (3) & (5) \end{matrix}$$

$$\| Z_3 Z_5 \| = \| 15 \quad 33 \quad 0 \| \cdot \begin{Vmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix} = \| -5 \quad -23 \|.$$

Diferențele

$$c_3 - Z_3 = 5, \quad c_5 - Z_5 = 23$$

fiind pozitive, rezultă că valoarea $Z = 53$ este minimul căutat.

X.4. Să se rezolve prin metoda tablourilor problema

$$[\text{Max}]\, Z = 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 6x,$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_3 - x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 &= -12 \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

R. Cu adăugarea variabilelor artificiale x_6, x_7, x_8 avem

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_3 - x_5 + x_6 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 - x_2 &= -12 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_8 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

Notăm că variabilele artificiale sînt afectate de semnul corespunzător al membrului doi. Putem începe cu soluția particulară

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad x_6 = 3, \quad x_7 = 12, \quad x_8 = 4.$$

$$Z = 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 6x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8$$

unde M este o cantitate arbitrară foarte mare.

Vom vedea că nu este util să fixăm o valoare a lui M.

Avem tabloul

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	B
	(6)	3	0	1	0	−1	1	0	0	3
	(7)	−1	−1	0	3	0	0	1	0	12
	(8)	0	1	1	0	1	0	0	1	4
	c_j	4	3	−1	2	6	$-M$	$-M$	$-M$	Z

Pentru a efectua prima iterare și a elimina prioritatea variabilelor artificiale, vom face să apară zero sub matricea unitate, în linia c. Pentru aceasta adăugăm fiecărui c_j cantitatea

$$(a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj})\, M$$

și lui Z cantitatea

$$(b_1 + b_2 + \cdots + b_m)\, M.$$

Obținem tabloul

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	
	(6)	3	0	1	0	−1	1	0	0	3
$\xrightarrow{s}$	(7)	−1	−1	0	3	0	0	1	0	12
	(8)	0	1	0	0	1	0	0	1	4
	Δ_j	$2M+4$	3	$2M-1$	$3M+26$		0	0	0	$Z+19M$
					$\uparrow e$					

Introducem în bază vectorul A_4 și scoatem vectorul A_7.

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	X
$\xrightarrow{s}$	(6)	3	0	1	0	−1	1	0	0	3
	(4)	−1/3	−1/3	0	1	0	0	1/3	0	4
	(8)	0	1	1	0	1	0	0	1	4
	Δ_j	$3M+\frac{14}{3}$	$M+\frac{11}{3}$	$2M-1$	0	6	0	$M-\frac{2}{3}$	0	$Z+7M-8$
		$\uparrow e$								

Introducem în bază vectorul A_1 și scoatem vectorul A_6

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	X
	(1)	1	0	1/3	0	−1/3	1/3	0	0	1
	(4)	0	−1/9	1/9	1	−1/9	1/9	1/3	0	$\frac{13}{3}$
$\xrightarrow{s}$	(8)	0	1	1	0	1	0	0	1	4
	Δ_j	0	$M+\frac{11}{3}$	$M-\frac{23}{9}$	0	$M+\frac{68}{9}$	$-M-\frac{14}{9}$	$-M-\frac{2}{3}$	0	$Z+4M-\frac{38}{3}$.
						$\uparrow e$				

Introducem în bază vectorul A_5 şi scoatem vectorul A_8. Avem tabloul

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	X
(1)	1	1/3	2/3	0	0	1/3	0	1/3	$\frac{7}{3}$
(4)	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	1	0	1/9	1/3	1/9	43/9
(5)	0	1	1	0	1	0	0	1	4
Δ_j	0	$-\frac{35}{9}$	$-\frac{91}{9}$	0	0	$-M-\frac{14}{9}$	$-M-\frac{2}{3}$	$M-\frac{68}{9}$	$Z-\frac{386}{9}$.

Nu avem nici o cantitate Δ_j pozitivă. Algoritmul s-a terminat. Soluţia optimă este

$$x_1 = \frac{7}{3},\ x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = \frac{43}{9},\ x_5 = 4,\ x_6 = x_7 = x_8 = 0.$$

iar funcţia economică

$$Z = \frac{386}{9}.$$

X.5. O ţară importatoare de vinuri dispune de o piaţă nelimitată dar se află restrînsă prin reglementarea importurilor asupra cantităţilor lunare maximale autorizate, care se stabilesc astfel:

vin categoria I cel mult 2000 butelii a 35 lei,
vin categoria II cel mult 2500 butelii a 25 lei,
vin categoria III cel mult 1200 butelii a 20 lei.

El efectuează trei amestecuri A, B şi C vîndute la preţurile respective de 34, 28,5 şi 22,5 lei butelia. Aceste amestecuri se fac astfel:

A {nu mai puţin de 60% vin categoria I,
nu mai mult de 20% vin categoria III,

B {nu mai puţin de 15% vin categoria I,
nu mai mult de 60% vin categoria III,

C {nu mai mult de 50% vin categoria III.

Să se determine amestecurile care dau beneficii maxime.

R. Calitatea C nu conţine mai mult de 50% vin categoria III; deci ea trebuie să conţină 50% vin categoria II, dar în aceste condiţii ea este vîndută la preţul de cumpărare; acest procedeu nu are semnificaţie economică.

Notăm x_{11} cantitatea de vin categoria I, x_{12} cea de vin categoria II şi x_{13} cantitatea de vin categoria III conţinute în amestecul A; pe x_{21}, x_{22} şi x_{23} cantităţile corespunzătoare conţinute în amestecul B.

Funcţia economică se scrie

$$Z = 34\ (x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 28{,}5(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 35(x_{11} + x_{21}) - 25(x_{12} + x_{22}) - \\ -20(x_{13} + x_{23}) = -x_{11} + 9x_{12} + 14x_{13} - 6{,}5x_{21} + 3{,}5x_{22} + 8{,}5x_{23}.$$

Restricţiile sînt următoarele:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} \leqslant 2000 \\ x_{12} + x_{22} \leqslant 2500 \\ x_{13} + x_{23} \leqslant 1200 \end{array}\right\} \quad \text{şi} \quad \left.\begin{array}{l} x_{11} \geqslant 0{,}60(x_{11} + x_{12} + x_{13}) \\ x_{13} \leqslant 0{,}20(x_{11} + x_{12} + x_{13}) \\ x_{23} \leqslant 0{,}60(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \\ x_{21} \geqslant 0{,}15(x_{12} + x_{22} + x_{23}) \end{array}\right\}$$

sau

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} \leqslant 2000 \\ x_{12} + x_{22} \leqslant 2500 \\ x_{13} + x_{23} \leqslant 1200 \end{array}\right\} \quad \text{şi} \quad \left.\begin{array}{l} 3x_{12} + 3x_{13} - 2x_{11} \leqslant 0 \\ 4x_{13} - x_{11} - x_{12} \leqslant 0 \\ 2x_{23} - 3x_{21} - 3x_{22} \leqslant 0 \\ 3x_{22} + 3x_{23} - 17x_{21} \leqslant 0 \end{array}\right\}$$

Avem 13 necunoscute şi 7 restricţii, deci cel puţin 6 variabile nule. Tabloul de plecare este următorul:

	(1) x_{11}	(2) x_{12}	(3) x_{13}	(4) x_{21}	(5) x_{22}	(6) x_{23}	(7) x_1	(8) x_2	(9) x_3	(10) x_4	(11) x_5	(12) x_6	(13) x_7	B
(7)	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2000
(8)	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	2500
(9)	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1200
(10)	−2	3	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(11)	−1	−1	4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
(12)	0	0	0	− 3	−3	2	0	0	0	0	0	1	0	0
(13)	0	0	0	−17	3	3	0	0	0	0	0	0	1	0
c_j	−1	9	14	−6,5	3,5	8,5	0	0	0	0	0	0	0	Z

Ne aflăm în cazul în care de la începutul calculului cîteva din elementele coloanei B sînt nule. Pentru a determina fără dificultate soluţia, vom înlocui în coloana B pe zero cu valorile ε care tind către zero şi dispar după cîteva iteraţii. În aceste condiţii, Z rămîne egal cu zero (deoarece $\varepsilon = 0$) în primele patru iteraţii).

Iteraţia 1. Se înlocuieşte A_3 prin A_{11} deoarece la A_3 corespunde costul c_j cel mai mare (14) şi la A_{11} valoarea pozitivă $\frac{b_i}{a_{i_3}}$ este cea mai slabă $\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$.

Iteraţia 2. Se înlocuieşte A_{10} prin A_{12} în bază $\left(\Delta_2 = \frac{25}{2}, \frac{xi}{ai_2} > 0\right.$ cel mai slab corespunde la A_{10}: $\left.\frac{\varepsilon}{15}\right)$.

Iteraţia 3. Se înlocuieşte în bază A_{13} prin A_6, $\left(\Delta_6 = 8{,}5, \frac{x_i}{a_{i6}} > 0\right.$ cel mai slab corespunde la A_{13}: $\left.\frac{\varepsilon}{3}\right)$.

Iterația 4. Se înlocuiește A_{12} prin A_4 $\left(\Delta_4 = \frac{125}{3}, \frac{x_i}{a_{i4}} > 0 \text{ cel mai slab corespunde la } S_{12} : \frac{\varepsilon}{25}\right)$.

Tabloul obținut este:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	X
(7)	1	0	0	0	3/5	0	1	0	0	0	0	−3/25	2/25	2000
(8)	1/3	0	0	0	1	0	0	1	0	−4/15	1/5	0	0	2500
(9)	1/3	0	0	0	12/5	0	0	0	1	−1/1	1/5	−17/25	3/25	1200
(2)	−1/3	1	0	0	0	0	0	0	0	4/15	1/5	0	0	0
(3)	−1/3	0	1	0	0	0	0	0	0	1/15	1/5	0	0	0
(4)	0	0	0	1	−3/5	0	0	0	0	0	0	3/25	−2/25	0
(6)	0	0	0	0	−12/25	1	0	0	0	0	0	17/25	−3/25	0
Δj	20/3	0	0	0	20 ↑ e	0	0	0	0	−10/3	−1	−5	1/2	$Z-0$

Iterația 5. Înlocuim A_9 prin A_5.

Iterația 6. Înlocuim A_7 prin A_1 $\left(\Delta_1 = \frac{35}{9}, \min \frac{x_i}{a_{i1}} = \frac{12 \times 1\,700}{11} > 0\right)$.

Iterația 7. Se înlocuiește A_8 prin A_{12} $\left(\Delta_{12} = \frac{5}{11}, \min \frac{x_i}{a_{i12}} = 447 > 0\right)$.

Se constată că toți Δ_j sînt negativi, am obținut deci soluția optimă

$$x_{11} = 1\,527;\ x_{12} = 509;\ x_{13} = 509;\ x_{21} = 473;\ x_{22} = 1991;\ x_{23} = 691.$$

iar celelalte variabile sînt zero în afară de $x_6 = 6011$ și $Z = 19\,940$ lei.

X.6. O întreprindere fabrică, la o mașină dată, lucrînd experimental, 45 ore pe săptămînă, trei produse diferite P_1, P_2 și P_3. Articolul P_1 lasă un venit net de 4 lei, articolul P_2 un venit de 12 lei și articolul P_3 un venit de 3 lei. Randamentele orare ale mașinii sînt, respectiv pentru fiecare din cele trei produse, în ordine: 50, 25 și 75. În sfîrșit vînzările posibile sînt limitate astfel: 1000 obiecte P_1, 500 obiecte P_2 și 1500 obiecte P_3. Cum se repartizează producția pentru a maximiza venitul întreprinderii?

R. Dacă notăm cu x_1 cantitatea fabricată din produsul P_1, x_2 cantitatea corespunzătoare de P_2 și x_3 cea relativă la P_3, restricțiile problemei sînt

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\leqslant 1\,000 \\ x_2 &\leqslant 500 \\ x_3 &\leqslant 1\,500 \end{aligned}\right\}, \text{ restricții de producție maximă,}$$

$$\frac{1}{50} x_1 + \frac{1}{25} x_2 + \frac{1}{75} x_3 \leqslant 45 \text{ restricție de timp disponibil}$$

și funcția de maximizat

$$Z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3.$$

Economic vorbind, putem face următorul raționament : fabricînd cu precădere produsul al cărui randament monetar orar este ridicat, apoi în restul timpului disponibil cel al cărui randament este pe locul al doilea și apoi ultimul. Randamentul monetar se ordonează astfel :

$$P_2 : 300 \text{ lei/h}; \; P_3 : 225 \text{ lei/h}; \; P_1 : 200 \text{ lei/h}.$$

convenind în consecință să se fabrice cantitățile următoare :

$$P_2 : x_2 = 500; \; P_3 : x_3 = 1\,500; \; P_1 : x_1 = 250$$

pentru a obține venitul maxim

$$\max Z = 1000 + 6000 + 4500 + 11\,500 \text{ lei},$$

Metoda programării liniare duce evident la același rezultat.

Introducînd variabilele de abatere x_4, x_5, x_6 și x_7, sistemul se scrie

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 1000 \\ x_2 + x_5 &= 500 \\ x_3 + x_6 &= 1500 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_7 &= 6750 \end{aligned}\right\}$$

$$[\text{Max}]\; Z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3.$$

Avem

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	B
s →	(4)	1	0	0	1	0	0	0	1000
	(5)	0	1	0	1	1	0	0	500
	(6)	0	0	1	0	0	1	0	1500
	(7)	3	6	2	0	0	0	1	6750
	c_j	4	12 ↑e	3	0	0	0	0	Z

									X
s →	(4)	1	0	0	1	0	0	0	1000
	(2)	0	1	0	0	1	0	0	500
	(6)	0	0	1	0	0	1	0	1500
	(7)	3	0	2	0	−6	0	1	3750
	Δ_j	4 ↑e	0	3	0	−12	0	0	$Z-6000$

									X
	(1)	1	0	0	1	0	0	0	1000
	(2)	0	1	0	0	1	0	0	500
	(6)	0	0	1	0	0	1	0	1500
s →	(7)	0	0	2	−3	−6	0	1	750
	Δ_j	0	0	3 ↑e	−4	−12	0	0	$Z-10\,000$

									X
	(1)	1	0	0	0	0	0	0	1000
	(2)	0	1	0	0	1	0	0	500
s →	(6)	0	0	0	3/2	3	1	−1/2	1125
	(3)	0	0	1	−3/2	−3	0	1/2	375
	Δ_j	0	0	0	1/2 ↑e	−3	0	−3/2	$Z-11\,125$

									X
	(1)	1	0	0	0	−2	−2/3	1/3	250
	(2)	0	1	0	0	1	0	0	500
	(4)	0	0	0	1	2	2/3	−1/3	750
	(3)	0	0	1	0	0	1	0	1500
	Δ_j	0	0	0	0	−4	−1/3	−4/3	$Z-11\,500$

Toate costurile marginale Δ_j sînt negative, deci am obținut soluția optimă : $x_1 = 250$; $x_2 = 500$; $x_3 = 1\,500$; $x_4 = 750$ (adică nu se fabrică 750 obiecte P_1) ; $x_5 = x_6 = x_7 = 0$ (adică se fabrică toate obiectele P_2 și P_3 și se utilizează tot timpul disponibil). Valoarea venitului net total este

$$Z = 11\,500.$$

X.7. O întreprindere este compusă din trei ateliere A, B, C și produce trei produse 1, 2, 3 în cantități lunare x_1, x_2, x_3 determinate. Cele trei ateliere se limitează respectiv la 2766, 624 și 416 ore de muncă lunar.

Produsul 1 se convine să se desfășoare astfel :

Atelierele succesive	A	C	B	C
Randamente orare	0,357	30	12	15

Produsul 2 se desfășoară astfel :

Atelierele succesive	A	B	C
Randamente orare	0,286	12	15

Produsul 3 :

Atelierele succesive	B	C
Randamente orare	9,6	12

Cererile lunare pentru cele trei produse sînt respectiv de 250, 1250 şi 1500. O cerere nesatisfăcută nu implică penalizare specială. Veniturile unitare respective după cele trei produse sînt 350, 250 şi 400. Să se găsească programul care asigură un venit maxim.

R. Avem schema din fig. X.7, *a*; x_1, x_2, x_3 sînt cantităţile necunoscute. Programul se scrie

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x_1}{0{,}357} + \frac{x_2}{0{,}286} \leqslant 2766,\\
&\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{12} + \frac{x_3}{9{,}6} \leqslant 624\\
&\frac{x_1}{30} + \frac{x_1}{15} + \frac{x_2}{15} + \frac{x_3}{12} \leqslant 416\\
&0 \leqslant x_1 \leqslant 250\\
&0 \leqslant x_2 \leqslant 1250\\
&0 \leqslant x_3 \leqslant 1500
\end{aligned}\right\}$$

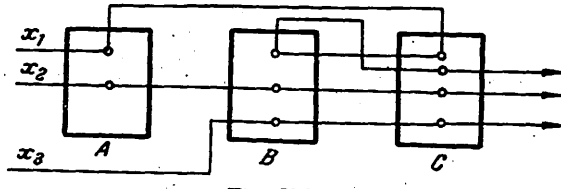


Fig. X.7, a

$$[\text{Max}]\, Z = 350x_1 + 250x_2 + 400x_3.$$

Scriem

$$\frac{x_1}{357} + \frac{x_2}{286} \leqslant 2{,}766, \tag{1}$$

$$8x_1 + 8x_2 + 10x_3 \leqslant 96 \cdot 624 \text{ sau } 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 29\,952, \tag{2}$$

$$2x_1 + 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 60 \cdot 416 \text{ sau } 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 24. \tag{3}$$

Restricţia (3) este mai puternică ca (2), care poate fi suprimată. Dar

$$(4)\ x_1 \leqslant 250;\quad (5)\ x_2 \leqslant 1250;\quad (6)\ x_3 \leqslant 1500$$

sînt astfel că

$$6 \cdot 250 + 4 \cdot 1250 + 5 \cdot 1500 = 14\,000 \leqslant 24\,960.$$

Deci restricţiile (4), (5) şi (6) sînt mai puternice ca (3) care poate fi suprimată. Rezultă deci programul liniar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1}{357} + \frac{x_2}{286} &\leqslant 2{,}766 \\ x_1 &\leqslant 250 \\ x_2 &\leqslant 1250 \\ x_3 &\leqslant 1500 \end{aligned}\right\}$$

$$[\text{Max}]\ Z = 350\,x_1 + 250x_2 + 400x_3.$$

Pe de altă parte, nimic nu interzice să luăm $x_3 = 1\,500$, de unde

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1}{357} + \frac{x_2}{286} &\leqslant 2{,}766 \\ x_1 &\leqslant 250 \\ x_2 &\leqslant 1250 \end{aligned}\right\}$$

$$[\text{Max}]Z' = 350\,x_1 + 250\,x_2.$$

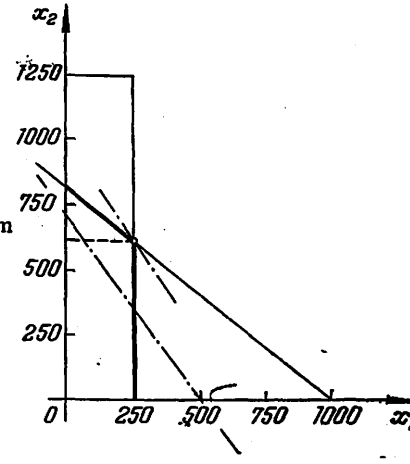


Fig. X.7, b

Avem 5 variabile dintre care trei variabile abatere şi trei restricţii

$$N = 5,\ M = 3,\ N - M = 2;$$

soluţia avînd cel puţin două variabile nule.

Căutăm soluţia grafic în spaţiul cu două dimensiuni. Trasăm dreptele $x_1 = 250$; $x_2 = 1\,250$ şi domeniul

$$\frac{x_1}{357} + \frac{x_2}{286} \leqslant 2{,}766,$$

a cărui frontieră trece prin punctele (fig. X.7, *b*)

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 791{,}076 \end{cases} \text{şi} \begin{cases} x_1 = 987{,}462 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Se vede pe figură că $x_1 = 250$. Atunci

$$\frac{250}{357} + \frac{x_2}{286} = 2{,}766$$

şi $x_2 = 590{,}876$. Rezultă

$$\max Z = 835\,219 \text{ lei}.$$

X.8. Să se rezolve problema de programare liniară parametrică :

$$[\text{Max}]\, Z = 4(1 + \lambda)x_1 + 2x_2$$

cu restricţiile

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x_1 \leqslant 6 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 10. \end{array}\right\}$$

R. Vom pleca, pentru a face să varieze λ, de la soluţia optimală obţinută pentru $\lambda = 0$ şi anume

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	B
	(3)	1	0	1	0	0	6
	(4)	0	1	0	1	0	8
s →	(5)	3	2	0	0	1	10
	c_j	4 ↑e	2	0	0	0	Z

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
	(3)	0	−2/3	1	0	−1/3	8/3
	(4)	0	1	0	1	0	8
	(1)	1	2/3	0	0	1/3	10/3 ↑s
	Δ_j	0	−2/3	0	0	−4/3	$Z = \frac{40}{3}$.

Toţi Δ_j sînt negativi, deci soluţia optimală a fost obţinută printr-o singură iteraţie. Transformăm această soluţie introducînd parametrul λ;

c_i		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
0	(3)	0	−2/3	1	0	−1/3	8/3
0	(4)	0	1	0	1	0	8
$4(1 + \lambda)$	(1)	1	2/3	0	0	1/3	10/3
	c_j	$4(1+\lambda)$	2	0	0	0	

Rezultă

$$\Delta_1 = 4(1 + \lambda) - 4(1 + \lambda) = 0,$$

$$\Delta_2 = 2 - \left[-\frac{2}{3} \cdot 0 + 1 \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 4(1 + \lambda) \right] = -\frac{2}{3} - \frac{8}{3}\lambda,$$

$$\Delta_3 = 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_4 = 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_5 = 0 - \left[-\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 4\ (1+\lambda) \right] = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\lambda$$

și

$$Z = \frac{10}{43} \cdot 4(1 + \lambda) = \frac{40}{3} + \frac{40}{3}\lambda,$$

de unde rezultă tabloul modificat :

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
(3)	0	$-2/3$	1	0	$-1/3$	8/3
(4)	0	1	0	1	0	8
(5)	1	2/3	0	0	1/3	10/3
Δ_j	$0 - \frac{2}{3} - \frac{8}{3}\lambda$	0		$0 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\lambda$		$Z = \frac{40}{3} + \frac{40}{3}\lambda$

Vom examina ce se întîmplă pentru $0 \leqslant 4(1+\lambda) < +\infty$, adică pentru $-1 \leqslant \lambda < +\infty$

λ	-1		$-1/4$		$+\infty$
$-\frac{2}{3} - \lambda\frac{8}{3}$		+	0	−	
$-\frac{4}{3} - \lambda\frac{4}{3}$	0	−		−	
	(2) intră în bază		soluția anterioară		

Dacă $-1 < \lambda \leqslant -\frac{1}{4}$.

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
	(3)	0	$-2/3$	1	0	$-1/3$	6
	(4)	0	1	0	1	0	3
$s \rightarrow$	(1)	1	2/3	0	0	1/3	5
			$0 - \frac{2}{3} - \frac{8}{3}\lambda$	0	$0 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\lambda$		$Z - 10$
			$\uparrow e$				

Noul optimum este atins (fig. X.8), în rezumat :

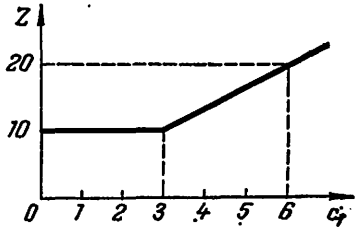


Fig. X.8

λ	-1	$-1/4$	$+\infty$
c_1	0	3	$+\infty$
x_1	0		10/3
x_2	5		0
x_3	6		8/3
x_4	3		8
x_5	0		0
Z	10	$\downarrow$ 10	$\frac{40}{3}+\frac{40}{3}\lambda$

X.9. Să se rezolve programul liniar parametric :

$$[\text{Max}]\, Z = 15x_1 + 10\,x_2,$$

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant x_1 \leqslant 3 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 5 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 6(1+\lambda) \end{array}\right\}$$

R. Plecăm de la soluţia optimală obţinută pentru $\lambda = 0$.

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	B
$s \rightarrow$	(3)	1	0	1	0	0	3
	(4)	0	1	0	1	0	5
	(5)	2	1	0	0	1	6
	c_j	15 $\uparrow e$	10	0	0	0	Z

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
$s \rightarrow$	(3)	0	$-1/2$	1	0	$-1/2$	ε
	(4)	0	1	0	1	0	5
	(1)	1	1/2	0	0	1/2	3
	Δ_j	0	5/2 $\uparrow e$	0	0	$-15/2$	$Z-45$

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	X
(3)		0	0	1	1/2	−1/2	5/2
(2)		0	1	0	1	0	5
(1)		1	0	0	−1/2	1/2	1/2
Δ_j		0	0	0	−5/2	−15/2	$Z - \frac{115}{2}$

A fost atinsă valoarea optimă. Matricea optimală a programului dual se scrie :

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	Y
(2)		−1/2	1	0	1/2	−1	5/2
(3)		1/2	0	1	−1/2	0	15/2
Δ_j		5/2	0	0	1/2	5	$Z - \frac{115}{2}$

Transformăm această soluţie introducînd parametrul λ

c_j		(1)	(2)	(3)	(4))	(5)	Y
5	(2)	−1/2	1	0	1/2	−1	5/2
$6(1+\lambda)$	(3)	1/2	0	1	−1/2	0	15/2
	c_j	3	5	$6(1+\lambda)$	0	0	

Avem ;

$$\Delta_1 = 3 - \left[-\frac{1}{2}\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 6(1+\lambda)\right] = \frac{5}{2} - 3\lambda,$$

$$\Delta_2 = 5 - 5 = 0,$$

$$\Delta_3 = 6(1+\lambda) - 6(1+\lambda) = 0,$$

$$\Delta_4 = 0 - \left[\frac{1}{2}\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot 6(1+\lambda)\right] = \frac{1}{2} + 3\lambda,$$

$$\Delta_5 = 0 - [-5] = 5$$

şi

$$Z = \frac{5}{2}\cdot 5 + \frac{15}{2}\cdot 6(1+\lambda) = \frac{115}{2} + 45\lambda.$$

Tabloul modificat este

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & Y \\
\hline
(2) & -1/2 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 5/2 \\
(3) & 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 5/2 \\
\hline
\Delta_j & \frac{5}{2} - 3\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{2} + 3\lambda & 5 & Z = \frac{115}{2} + 45\lambda
\end{array}
$$

Vom face să varieze b_3 între 0 şi $+\infty$, adică $-1 < \lambda < +\infty$.

λ	-1		$-1/6$		$5/6$		$+\infty$
$5/2 - 3\lambda$		$+$		$+$	0	$-$	
$1/2 + 3\lambda$		$-$	0	$+$		$+$	
	(4) intră în bază		soluţia anterioară			(1) intră în bază	

Primul caz: $-1 < \lambda < -\frac{1}{6}$. Se vede, imediat, că vectorul care intră în bază este cel al cărui Δ_j este cel mai mic număr negativ

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & Y \\
\hline
\overset{s}{\rightarrow} (2) & -1/2 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 5/2 \\
(3) & 1/2 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 15/2 \\
\hline
\Delta_j & \frac{5}{2} - 3\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{2} - 3\lambda & 5 & Z - \frac{115}{2} - 45\lambda
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & & & & & & Y \\
\hline
(4) & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 5 \\
(3) & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 10 \\
\hline
\Delta_j & \underset{>0}{3} & \underset{\geqslant 0}{-1-6\lambda} & 0 & 0 & \underset{\geqslant 0}{6(1+\lambda)} & Z - 60 - 60\lambda
\end{array}
$$

Cazul doi: $-\frac{1}{6} < \lambda < \frac{5}{6}$; soluţia anterioară se găseşte pentru $\lambda = 0$.

Cazul trei : $\lambda > \frac{5}{6}$

$$
\begin{array}{c|c|ccccc|c}
 & & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & Y \\
 & (2) & -1/2 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 5/2 \\
s\rightarrow & (3) & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 15/2 \\
\hline
 & \Delta_j & \frac{5}{2} - 3\lambda & 0 & 0 & 1/2 + 3\lambda & 5 & Z = \frac{115}{2} - 45\lambda. \\
 & & \uparrow e & & & & & \\
\hline
 & (2) & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 10 \\
 & (1) & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 15 \\
\hline
 & \Delta_j & 0 & 0 & \underset{\geq 0}{-5+6\lambda} & \underset{>0}{3} & \underset{>0}{5} & Z - 95.
\end{array}
$$

În rezumat (fig. X.9)

λ	-1 $\quad -1/6$	$5/6$	$+\infty$
b_3	$0 \quad 5$	11	$+\infty$
$x_1 = \Delta y_4$	0	$1/2 + 3\lambda$	3
$x_2 = \Delta y_5$	$6(1+\lambda)$	5	5
$x_3 = \Delta y_1$	3	$5/2 - 3\lambda$	0
$x_4 = \Delta y_2$	$-1-6\lambda$	0	0
$x_5 = \Delta y_5$	0	0	$-5+6\lambda$
Z	$60(1+\lambda) \xrightarrow{\downarrow} 50$	$115/2 + 45\lambda \xrightarrow{\downarrow} 95$	95

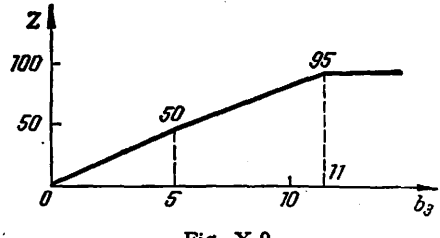


Fig. X.9

X.10. În cazul unui fenomen de aşteptare cu mai multe staţii să se demonstreze formula care dă numărul mediu de unităţi într-un şir

$$\bar{\nu} = \frac{\Psi^{s+1}}{S \cdot S!\,(1 - \Psi/S)^2}\, p_0.$$

R. Avem

$$\bar{v} = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n - S)p_n = \sum_{n=S+1}^{\infty} np_n - S \sum_{n=S+1}^{\infty} p_n, \tag{1}$$

$$\sum_{n=S+1}^{\infty} np_n = p_0 \left[(S+1)\frac{\Psi^{S+1}}{S!\,S} + (S+2)\frac{\Psi^{S+2}}{S!\,S^2} + \cdots \right] =$$

$$= \frac{p_0 \Psi}{S!} \left[(S+1)\frac{\Psi^S}{S} + (S+2)\frac{\Psi^{S+1}}{S^2} + \cdots \right].$$

În paranteză avem derivata sumei

$$\frac{\Psi^{S+1}}{S} + \frac{\Psi^{S+2}}{S^2} + \cdots = \frac{\Psi^{S+1}}{S} \left[1 + \frac{\Psi}{S} + \frac{\Psi^2}{S^2} + \cdots \right] =$$

$$= \frac{\Psi^{S+1}}{S} \cdot \frac{1}{1 - \Psi/S} = \frac{\Psi^{S+1}}{S - \Psi},$$

deci

$$\sum_{n=S+1}^{\infty} np_n = p_0 \left[\frac{(S+1)\Psi^{S+1}}{S!\,(S-\Psi)} + \frac{\Psi^{S+2}}{S!\,(S-\Psi)^2} \right],$$

$$S \sum_{n=S+1}^{\infty} p_n = p_0 S \left[\frac{\Psi^{S+1}}{S!\,S} + \frac{\Psi^{S+2}}{S!\,S^2} + \cdots \right] = \frac{p_0 \Psi^{S+1}}{S!} \cdot \frac{1}{1 - \Psi/S} =$$

$$= p_0 S \frac{\Psi^{S+1}}{S!} \cdot \frac{1}{S - \Psi}.$$

Înlocuind rezultatele obținute în (1), avem

$$\bar{v} = p_0 \left[\frac{\Psi^{S+1}}{S!\,(S-\Psi)} + \frac{\Psi^{S+2}}{S(S-\Psi)^2} \right] = p_0 \frac{\Psi^{S+1}}{SS!(1 - \Psi/S)^2}.$$

X.11. Fie un fenomen de așteptare cu mai multe stații. Procentul mediu al sosirilor pe zece minute este $\lambda = 8$. Durata medie a serviciului este de 5 minute. Să se calculeze, pentru $S = 5$, 6 și 7, numărul mediu $\bar{v}$ de unități într-un șir de așteptare și timpul mediu de așteptare $\bar{t}_f$ în șir.

II. $\lambda = 8, \mu = 2, \Psi = 4.$

$\underline{S = 5}$

$$\bar{\nu} = \frac{4^6}{5 \cdot 5!\,(1 - 4/5)^2}\, p_0,$$

cu

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{4^5}{5!\,(-4/5)} + 1 + 4 + \dfrac{4^2}{2!} + \dfrac{4^3}{3!} + \dfrac{4^4}{4!}} = \frac{1}{1024/4 + 824/24} = \frac{1}{77}.$$

Rezultă

$$\bar{\nu} = \frac{4^6}{4!} \cdot \frac{1}{77} = \frac{4^5}{6} \cdot \frac{1}{77} = 2{,}216.$$

$\underline{S = 6}$

$$\bar{\nu} = \frac{4^7}{6 \cdot 6!\,(1 - 4/6)^2}\, p_0$$

cu

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{4^6}{6!\,(1 - 4/6)} + 1 + 4 + \dfrac{4^2}{2!} + \cdots + \dfrac{4^5}{5!}} = \frac{1}{\dfrac{4^4}{2 \cdot 5!} + \dfrac{824}{24} + \dfrac{1024}{120}} = \frac{120}{7192}.$$

$$\bar{\nu} = \frac{4^7}{5!\,4} \cdot \frac{120}{7192} = 0{,}569.$$

$\underline{S = 7}$; se obține

$$p_0 = \frac{3 \cdot 720}{121264} \text{ și } \bar{\nu} = 0{,}18.$$

Timpul mediu de așteptare este dat de formula

$$\bar{t}_f = \frac{\nu}{\lambda}.$$

Făcînd calculele, obținem:
pentru $S = 5$, $\bar{t}_f = 2$ min 46 s,
pentru $S = 6$, $\bar{t}_f = 41$ s,
pentru $S = 7$, $\bar{t}_f = 13$ s.

X.12. Fie un atelier de reparat maşini în care sosirile urmează o lege Poisson de parametru $\lambda = 3$ (pe oră). Costul de staţionare pentru o maşină este de 10 lei pe oră. Se poate alege: 1) între un mecanic experimentat care repară maşini după un serviciu exponenţial cu timpul mediu de serviciu de 4 pe oră; el cere 3 lei sau 5 lei, inclusiv taxa; 2) un mecanic foarte experimentat care repară maşinile după un serviciu exponenţial cu timpul mediu de serviciu de 5 pe oră; el cere 4 lei pe oră sau 6,5 lei inclusiv taxa. Să se rezolve problema dacă se alege între doi muncitori experimentaţi şi doi muncitori foarte experimentaţi.

R. Se calculează timpul de aşteptare în ore de maşină în fiecare caz, pentru o zi de muncă de 8 ore:

$$1)\ 8\bar{n} = 8\frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 8\frac{3}{4-3} = 24\text{h}.$$

$$2)\ 8\bar{n} = 8\frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 8\frac{3}{5-3} = 12\text{ h}.$$

Costul în primul caz: $24 \cdot 10 + 8 \cdot 5 = 240$ lei/zi.
Costul în cazul doi: $12 \cdot 10 + 8 \cdot 6{,}5 = 172$ lei/zi.
Se angajează deci mecanicul cel mai experimentat.
În primul caz ($\lambda = 3$, $\mu = 4$, $S = 2$)

$$p_0 = \frac{160}{352},\ \bar{n} = 0{,}123 + 0{,}75 = 0{,}973,$$

de unde un cost zilnic

$$0{,}973 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 40 = 158 \text{ lei}.$$

În cazul al doilea ($\lambda = 3$, $\mu = 5$, $S = 2$)

$$p_0 = \frac{7}{13},\ \bar{n} = 0{,}06 + 0{,}6 = 0{,}66$$

şi costul zilnic

$$0{,}66 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 52 = 156{,}8 \text{ lei}.$$

Se angajează deci doi mecanici foarte experimentaţi.

X.13. La un post de vamă pentru automobile numărul turiştilor care se prezintă este de 20 pe oră. Timpul necesar de îndeplinire

a formalităţilor este de 6 minute de turist. Se admite că sosirile constituie un fenomen Poisson şi că serviciile sînt de tip exponenţial.

1° Cîţi lucrători de vamă sînt necesari pentru evitarea aglomerării traficului?

2° Administraţia studiază punerea unui serviciu proporţional cu numărul turiştilor. Care este probabilitatea p_n de-a avea n turişti în şir?

3° Numărul de lucrători care execută serviciul proporţional cu numărul clienţilor este limitat la 4. Care este probabilitatea ca şeful de brigadă să participe la serviciu?

R. 1° Avem $\lambda = 20$, $\mu = 10$, $\frac{\lambda}{\mu} = 2$.

Trebuie deci 2 vameşi pentru evitarea aglomeraţiei traficului.

2° În general

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t).$$

Aici $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = n\mu$, deci

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = -(\lambda + n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

Avem

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0,$$

$$2\mu p_2 = (\lambda + \mu)p_1 - \lambda p_0,$$

$$3\mu p_3 = (\lambda + 2\mu)p_2 - p_1,$$

Rezultă

$$p_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0,$$

$$p_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0.$$

Dar $\sum_0^\infty p_n = 1$, deci

$$p_0 + p_0 \sum_1^\infty \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} = 1 \text{ sau } p_0 + p_0 (e^{\lambda/\mu} - 1) = 1.$$

Astfel

$$p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \text{ și } p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!}$$

Aici

$$p_n = \frac{1}{n!} 2^n e^{-2} = 0{,}135 \frac{2^n}{n!}.$$

Rezultă

$p_0 = 0{,}135,$	$p_3 = 0{,}180$	$p_6 = 0{,}012$
$p_1 = 0{,}270,$	$p_4 = 0{,}090$	$p_7 = 0{,}003,$
$p_2 = 0{,}270,$	$p_5 = 0{,}036$	$p_8 = 0{,}001.$

Este ușor de constatat, după

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!},$$

că pentru echilibru avem un proces Poisson astfel că $\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu}$. Avem

$$\sum_0^\infty p_n = 0{,}997 \approx 1,$$

$$\sum_0^\infty n p_n = 1{,}991 \approx 2.$$

3° Probabilitatea ca șeful de brigadă să intervină pentru a sprijini pe cei 4 lucrători este

$$\sum_{n=5}^\infty p_n = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 = 0{,}055.$$

X.14. Într-un port se construiesc instalaţii de descărcare a minereului. Se poate alege între trei tipuri a, b şi c ale căror capacităţi medii zilnice sînt respectiv de 3000, 5000 şi 7000 t. Costurile fixe (amortizare, întreţinere...) sînt de 5000, 10 000 şi 15 000 lei pe zi iar costurile de funcţionare respective (numai în cazul în care operaţiile de descărcare au loc) sînt de 6000, 9000 şi 12 000 lei pe zi. Navele avînd 9000 t fiecare, sosesc, după un proces Poisson, în medie de două la trei zile. Costul de aşteptare a unei nave este de 20 000 lei pe zi.

Din cauza omogenităţii mărfurilor, trebuie alese instalaţii de un singur tip. Să se determine:

1° Instalaţia care trebuie realizată dacă nu se prevede o mărire sensibilă a traficului în viitor.

2° Aceeaşi instalaţie, în cazul în care se prevede o mărire sensibilă a traficului (de exemplu 100 %).

Se admite că serviciul este exponenţial.

R. Avem $\lambda = 2/3$ şi timpurile medii de serviciu exponenţial

$$\mu_a = \frac{3000}{9000} = \frac{1}{3}; \quad \mu_b = \frac{5000}{9000} = \frac{5}{9}; \quad \mu_c = \frac{7}{9}.$$

Cazurile (a, 1), (b, 1) şi (a, 2) trebuie eliminate deoarece provoacă aglomerarea. În celelalte cazuri să calculăm matricea costurilor fixe:

	1	2	3	4
a	—	—	15 000	20 000
b	—	20 000	30 000	40 000
c	15 000	30 000	45 000	60 000

Costurile variabile sînt pentru fiecare tip i (dacă k este numărul de instalaţii):

$$k \frac{\lambda}{k_{i:4}} c_{v_i} = \frac{\lambda}{\mu_i} C_{v_i}.$$

Se obţine tabloul:

Costuri variabile

	1	2	3	4
a	—	—	12 000	12 000
b	—	10 800	10 800	10 800
c	10 285	10 285	10 285	10 285

Vom calcula p_0 şi l_f după formulele:

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{\Psi^k}{k!\,(1-\Psi/k)} + \sum\limits_{n=0}^{k-1} \dfrac{\Psi^n}{n!}} = \frac{1}{\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{k\mu}{k\mu-1} + \sum\limits_{n=0}^{k-1} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n},$$

$$l_f = \frac{\Psi^k}{k \cdot k!\,\mu\,(1-\Psi/k)^2}\,p_0 = \frac{\mu\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2}\,p_0.$$

Valorile lui p_0

a	—	—	1/9	0,130
b	—	1/4	5/17	0,300
c	1/7	2/5	35/83	0,404

Valorile timpului de aşteptare

a	—	—	2,666	0,261
b	—	1,015	0,294	0,024
c	7,714	0,289	0,261	0,005

Costurile de aşteptare sînt de forma: $\lambda l_f c$, de unde tabloul corespunzător:

Costuri de aşteptare

	1	2	3	4
a	—	—	35 546	3 480
b	—	13 532	3 920	320
c	102 850	3 852	3 480	67

Costurile cumulate

	1	2	3	4
a	—	—	62 546	35 480
b	—	44 332	44 920	51 120
c	128 135	44 158	58 765	70 352

Deci construcţia cea mai puţin costisitoare este de patru instalaţii de tipul *a*.

2° O mărire a traficului de 100% după 20 de ani nu este de natură să modifice această decizie, deoarece pentru un trafic dublu, 7 instalaţii de tipul *a* au un cost cumulat de 51 000 lei, care după cum reiese din tablou este mic.

X.15. O cooperativă a observat că intrările la coafor urmează o lege Poisson şi că unicul operator care execută serviciile cheamă clienţii după o lege exponenţială. Numărul mediu de veniri este de 3 pe oră, iar durata medie a serviciului de 12 min.

1° Admiţînd că şirul de aşteptare este atît de lung cît vrem, să se calculeze $\bar{n}$, $\bar{\nu}$ şi t_f.

2° Apoi presupunem că la coafor nu sînt decît trei fotolii; clienţii care vin dacă găsesc cele trei fotolii ocupate nu aşteaptă, ei revin mai tîrziu şi concurează la fenomenul Poisson de care am vorbit mai sus. Să se calculeze probabilităţile ca la coafor să fie 0, 1, 2, 3 clienţi. Să se evalueze $\bar{n}$, $\bar{v}$ şi $\bar{t}_f$. Care este probabilitatea de a se găsi cel puţin un fotoliu liber? Care este probabilitatea să se aştepte mai mult de 20 minute?

3° Clientul remarcă că cele trei fotolii sînt ocupate. Care este probabilitatea ca el să fie servit imediat sau să revină peste 20 minute?

R. 1° Numărul mediu de sosiri este $\lambda = 1/20$ şi timpul de serviciu $\mu = 1/12$, dacă este luat minutul ca unitate de timp,

$$\Psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{5}.$$

Deducem

$$\bar{n} = \frac{\Psi}{1-\Psi} = \frac{3}{2}; \qquad \bar{v} = \frac{\Psi^2}{1-\Psi} = \frac{9}{10}.$$

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{9}{10} \cdot 20 = 18 \text{ min.}$$

2° Matricea de trecere se poate scrie

	0	1	2	3
0	$1-\lambda dt$	λdt	0	0
1	μdt	$1-(\lambda+\mu)dt$	λdt	0
2	0	μdt	$1-(\lambda+\mu)dt$	λdt
3	0	0	μdt	$1-\mu dt$

Matricea dinamică D se scrie:

$$D = \begin{Vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{Vmatrix}$$

şi sistemul

$$\left.\begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0 \\ \lambda p_0 - (\lambda+\mu)p_1 + \mu p_2 &= 0 \\ \lambda p_1 - (\lambda+\mu)p_2 + \mu p_3 &= 0 \\ \lambda p_2 - \mu p_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

cu

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Se obține

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0, \qquad p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0, \qquad p_3 = \frac{\lambda^3}{\mu^3} p_0.$$

În sfîrșit : $p_4(t) = 0$. Rezultă atunci

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3} = \frac{125}{272},$$

$$p_1 = 75/272; \quad p_2 = 45/272; \quad p_3 = 27/272.$$

Prin urmare :

$$\bar{n} = \sum_1^3 n p_n = \frac{246}{272} = 0{,}904,$$

$$\bar{v} = \sum_2^3 (n-1) p_n = \frac{99}{272} = 0{,}364,$$

$$t_f = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{0{,}364}{1/20} = 7{,}3 \text{ min.}$$

Probabilitatea de a găsi cel puțin un fotoliu liber este

$$1 - p_3 = 0{,}90.$$

Notăm cu $f(\omega)d\omega$ probabilitatea ca o unitate reperată să fie în șirul de așteptare între ω și $\omega + d\omega$. Numărul de unități din sistem pentru ca o unitate să consimtă să aștepte este 1 sau 2.

Probabilitatea ca să existe o unitate este 75/272 ; probabilitatea ca ea să nu părăsească fotoliul în intervalul ω este $e^{-\mu\omega}$; probabilitatea ca ea să părăsească fotoliul între ω și $\omega + d\omega$ este $\mu d\omega$.

Produsul $\frac{75}{272} e^{-\mu\omega} \mu d\omega$ exprimă deci probabilitatea ca o unitate reperată să aștepte în șir între ω și $\omega + d\omega$, ținînd seama de probabilitatea ca să existe o persoană la momentul cînd ea sosește.

De asemenea produsul $\frac{45}{272} \mu\omega\, e^{-\mu\omega} \mu d\omega$ reprezintă probabilitatea ca o unitate reperată să aștepte în șir între ω și $\omega + d\omega$, ținînd seama de probabilitatea de a exista două persoane în momentul în care ea sosește. Așadar

$$f(\omega)\, d\omega = \left[\frac{75}{272}\mu + \frac{45}{272}\mu^2\right] e^{-\mu\omega}\, d\omega.$$

Probabilitatea de a aştepta mai mult de 20 min este deci

$$\int_{20}^{\infty} f(\omega)\,d\omega = \mu\left[\frac{75}{272}\int_{20}^{\infty} e^{-\mu\omega}\,d\omega + \frac{45}{272}\int_{20}^{\infty} \mu\omega e^{-\mu\omega}\,d\omega\right] = 0{,}1361.$$

3° Considerăm schema din fig. X.15.

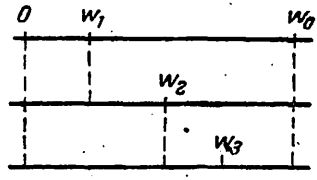


Fig. X.15

Probabilitatea ca să existe o ieşire între ω_1 şi $\omega_1 + d\omega_1$ este

$$\frac{(\mu\omega_1)^0 e^{-\mu\omega_1}}{0!}\,\mu d\omega_1$$

iar probabilitatea ca să nu fie nici o intrare între ω_1 şi ω_0 este

$$\frac{[\lambda(\omega_0-\omega_1)]^0 e^{-\lambda(\omega_0-\omega_1)}}{0!}\,e^{-\lambda(\omega_0-\omega_1)};$$

probabilitatea ca fotoliul 1 să rămină liber este

$$P_1 = \int_0^{\omega_0} \mu e^{-\mu\omega_1}\,e^{-\lambda(\omega_0-\omega_1)}\,d\omega_1.$$

Probabilitatea ca să fie două ieşiri, dintre care una între ω_2 şi $\omega_2 + d\omega_2$, este

$$\frac{(\mu\omega_2)^1 e^{-\mu\omega_2}}{1!}\,\mu d\omega_2;$$

probabilitatea ca fotoliul 2 să rămină liber este deci

$$P_2 = \int_0^{\omega_0} \mu^2\omega_2 e^{-\mu\omega_2} e^{-\lambda(\omega_0-\omega_2)}\,d\omega_2.$$

La fel se ajunge la probabilitatea ca fotoliul 3 să rămină liber

$$P_3 = \int_0^{\omega_0} \frac{1}{2}\,\mu^3\omega_3^2 e^{-\mu\omega_3} e^{-\lambda(\omega_0-\omega_3)}\,d\omega_3.$$

Avem următorul tablou:

Ieşiri	Fotoliul liber	
A	α	$P_1 = P(A) \cdot P_A(\alpha)$
AB	β	$P_2 = P(A) \cdot P_A(B) P_{AB}(\beta)$
ABC	γ	$P_3 = P(A) \cdot P_A(B)\, P_{AB}(C) P_{ABC}(\gamma)$

Probabilitatea căutată este

$$P = P(A) \cdot P_A(B) P_{AB}(C) P_A(\alpha) P_{AB}(\beta) P_{ABC}(\gamma).$$

Deci

$$P = \frac{\prod_1^3 P_i}{P^2(A) P_A(B)}.$$

Calculele dau:

$$P_1 = \frac{\mu}{\lambda - \mu} e^{-\lambda\omega} [e^{(\lambda-\mu)\omega_0} - 1],$$

$$P_2 = \frac{\mu^2}{(\lambda - \mu)^2} e^{-\lambda\omega_0} [(\lambda - \mu)\omega_0 e^{(\lambda-\mu)\omega_0} - e^{(\lambda-\mu)\omega_0} + 1],$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^3}{(\lambda - \mu)^3} e^{-\lambda\omega_0} \{[(\lambda - \mu)^2\omega_0^2 - 2(\lambda - \mu)\omega_0 + 2] e^{(\lambda-\mu)\omega_0} - 2\},$$

$$P(A) = 1 - e^{-\mu\omega_0},$$

$$P_A(B) = -\mu\omega_0 e^{-\mu\omega_0} - e^{-\mu\omega_0} + 1.$$

Numeric:

$$P(A) = 0{,}811; \quad P^2(A) = 0{,}658;$$

$$P_A(B) = 0{,}496;$$

$$P_1 = 0{,}448; \quad P_2 = 0{,}333; \quad P_3 = 0{,}186;$$

de unde

$$P = \frac{0{,}48 \cdot 0{,}333 \cdot 0{,}186}{0{,}658 \cdot 0{,}496} = \frac{0{,}01778}{0{,}3264} = 0{,}054.$$

Clientul are 5,4 şanse dintr-o sută de a fi servit imediat dacă revine peste 20 min.

X.16. Stocarea unui articol de mare consumaţie (200 000 unităţi pe an) revine la 0,002 lei pe zi pentru un articol.

1° Care este mărimea celei mai economice şarje şi perioada de gestiune astfel încît costul de lansare a unei şarje să fie de 720 lei?

2° Ce se întîmplă dacă admitem o ruptură de stoc cu un cost de pierdere de 0,008 lei pe zi pentru un articol?

R. 1° Avem

$$n = n_0 = \sqrt{2\frac{N}{\theta}\frac{C_l}{C_s}};$$

aici $N = 200\,000$, $\theta = 360$ zile, $C_l = 720$ lei, $C_s = 0{,}002$ lei, de unde rezultă

$$n_0 = \sqrt{2\frac{2\,000\,000}{360}\cdot\frac{720}{0{,}002}} = \sqrt{4\cdot 10^8} = 20\,000 \text{ articole},$$

$$T_0 = \frac{\theta}{N}n_0 = \frac{360}{200\,000}\cdot 20\,000 = 36 \text{ zile},$$

$$\Gamma_0 = \sqrt{2N\theta C_l C_s} = \sqrt{2\cdot 200\,000\cdot 360\cdot 720\cdot 0{,}002} = 14\,400 \text{ lei}.$$

2° Costul de pierdere este

$$\rho = \frac{0{,}008}{0{,}002 + 0{,}008} = \frac{0{,}008}{0{,}01} = 0{,}8$$

de unde

$$n_0 = 20\,000\sqrt{\frac{1}{0{,}8}} = 22\,500 \text{ articole},$$

$$s_0 = 22\,500\cdot 0{,}8 = 18\,000,$$

$$T_0 = 36\cdot\sqrt{\frac{1}{0{,}8}} = 40{,}5 \text{ zile},$$

$$\Gamma_0 = 14\,000\cdot 0{,}88 = 12\,672 \text{ lei}.$$

X.17. Considerăm un fenomen de stocaj în care cererea este constantă şi anume h piese pe unitate de timp. Posibilităţile de fabricaţie sînt de f piese pe unitatea de timp. Costul de stocaj pe piesă şi pe unitate de timp este C_s; costul fix de lansare al unei serii oarecare este C_l.

Să se afle numărul n_0 de piese la lansare pe serie şi la perioada T_0.

Aplicaţie: $C_s = 0{,}1$ lei pe zi; $C_l = 1000$ lei, $h = 250$ piese pe zi, $f = 1000$ piese pe zi.

R. Avem $n = f\tau = hT$ (fig. X.17). Costul de stocaj este

$$\frac{1}{2}\,n\,TC_s + \frac{1}{2}\,n\,\tau\,C_s = \frac{1}{2}\,h\,T^2C_s(1 + h/f).$$

Costul total al unei serii este stabilit la

$$\Gamma = C_l + \frac{1}{2}\,h\,T^2C_s(1 + h/f),$$

de unde costul pe unitatea de timp

$$\gamma = C_l/T + \frac{1}{2}\, hTC_s(1 + h/f).$$

Costul are un extremum pentru

$$\frac{d\gamma}{dT} = \frac{-C_l}{T} + \frac{1}{2}\, hC_s(1 + h/f) = 0,$$

de unde

$$T_0^2 = \frac{2C_l f}{hC_s(f + h)}.$$

Se deduce că

$$n_0 = hT_0 = \sqrt{2\frac{C_l T}{hC_s} \cdot \frac{h}{f + h}}.$$

Aplicație:

$$T_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 1000}{250 \cdot 0{,}1 \cdot 1250}} = 8 \text{ zile},$$

$$n_0 = hT_0 = 8 \cdot 250 = 2000 \text{ piese}.$$

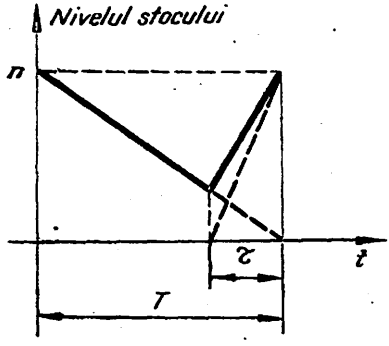


Fig. X.17

X.18. Un depozit de produse farmaceutice posedă un stoc de produse de larg consum. Costul de stocaj pentru fiecare articol pe săptămînă este $C_s = 2$ lei. Lipsa unui articol atrage după sine o pierdere C_p evaluată la 40 lei pe săptămînă de articol. Cererea r este aleatoare și repartiția urmează o lege Poisson:

$$p_T(r) = \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^2}{r!},$$

T fiind perioada de gestiune în săptămîni.

Reaprovizionarea se face fără amînări la sfîrșitul fiecărei perioade de gestiune T, completînd nivelul maxim al stocului.

Să se determine capacitatea optimă de stocaj precum și perioada de gestiune optimală astfel încît să se minimizeze costul global pe interval de un an, cererea medie, în sute de articole, pe săptămînă fiind 3, ($\lambda = 3$; $T = 1$).

R. Valoarea medie a costului total pe o perioadă T este

$$\Gamma_T(s) = TC_s \sum_{r=0}^{s} \left(s - \frac{r}{2}\right) p_T(r) + TC_s \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{r}\, p_T(r) +$$

$$+ TC_p \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{(r - s)^2}{r} \cdot p_T(r).$$

Se vede că, pentru o perioadă T, minimul lui $\Gamma_T(s)$ are loc pentru s_0 astfel că

$$L(s_0 - 1) \lhd \rho \lhd L(s_0),$$

unde

$$\rho = \frac{C_p}{C_s + C_p}$$

şi

$$L(s) = p(r \leqslant s) + \left(s + \frac{1}{2}\right) \sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{p(r)}{r}.$$

1° $T = 1$ săptămînă

s	r	$p_1(r)$	$\frac{p_1(r)}{r}$	$\sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{p_1(r)}{r}$	$\left(s + \frac{1}{2}\right) \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{p_1(r)}{r}$	$p(r \leqslant s)$	$L_1(s)$
0	0	0,5	∞	0,4114	0,2057	0,05	0,2557
1	1	0,15	0,15	0,2614	0,3921	0,20	0,5921
2	2	0,23	0,115	0.1464	0,3660	0,43	0,7960
3	3	0,22	0,0714	0,075	0,2625	0,65	0,9125
4	4	0,17	0,0425	0,0325	0,14625	0,82	0,9663
5	5	0,10	0,02	0,0125	0,06875	0,92	0,9888
6	6	0,05	0,0083	0,0042	0,0273	0,97	0,9973
7	7	0,02	0,0029	0,0013	0,00975	0,99	0,9998
8	8	0,01	0,0013	0	0,00000	1,00	1,0000

Pentru $s = 4$ avem

$$[L_1(3) = 0{,}9215] \lhd (\rho = 40/42 = 0{,}9524) \lhd [L_1(4) = 0{,}9663].$$

Stocul optimal este deci egal cu 4.

Valoarea medie a costului corespunzător este

$$\Gamma_1(4) = 7{,}1036 \text{ lei},$$

sau, deoarece distribuţia este dată în sute de articole,

$$\Gamma_1(4) = 710{,}36 \text{ lei}.$$

Costul anual al unei gestiuni este

$$710{,}36 \cdot 52 = 36\,938{,}72 \text{ lei}$$

2° $T = 2$ săptămîni. Vom utiliza legea Poisson

$$p_2(r) = e^{-6}\frac{(6)^r}{r!}$$

s	r	$p_2(r)$	$\frac{p_2(r)}{r}$	$\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p_2(r)}{r}$	$\left(s+\frac{1}{2}\right)\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{p_2(r)}{r}$	$p(r\leqslant s)$	$L_2(s)$
1	1	0,02	0,020	0,1966	0,2949	0,02	0,3149
2	2	0,06	0,030	0,1666	0,4165	0,08	0,4965
3	3	0,09	0,030	0,1366	0,4781	0,17	0,6481
4	4	0,13	0,032	0,1046	0,4707	0,30	0,7707
5	5	0,16	0,032	0,0726	0,3993	0,46	0,8593
6	6	0,16	0,026	0,0466	0,3029	0,62	0,9229
7	7	0,14	0,020	0,0266	0,1995	0,76	0,9595
8	8	1,10	0,012	0,0149	0,1241	0,86	0,9841
9	9	0,07	0,008	0,0066	0,0627	0,93	0,9927
10	10	0,04	0,004	0,0026	0,0273	0,97	0,9973
11	11	0,02	0,00018	0,0008	0,0092	0,99	0,9992
12	12	0,01	0,0008	0,0000	0,0000	1,00	1,0000

Pentru $s = 7$ avem

$$[L_2(6) = 0{,}9229] < (\rho = 0{,}9542) < [L_2(7) = 0{,}9595].$$

Stocul optimal este deci egal cu 7.
Valoarea medie a costului corespunzător este

$$\Gamma_2(7) = 21{,}772$$

sau, deoarece distribuţia este dată în sute de articole,

$$\Gamma_2(7) = 2177{,}2 \text{ lei.}$$

Costul anual al gestiunii este

$$2177{,}2 \cdot 26 = 56\,607{,}2 \text{ lei.}$$

Acest cost anual este superior costului corespunzător la o perioadă de gestiune de o săptămînă. Se alege deci o perioadă de gestiune de o săptămînă şi nivelul optimal al stocului la începutul perioadei este de 400 articole.

X.19. O întreprindere constructoare de maşini-unelte lansează pe piaţă o serie de maşini analogice.

Această serie de maşini este limitată la un anumit număr de exemplare.

1° Să se determine numărul de piese de schimb de un anumit tip ce trebuie puse în stoc ştiind că, dacă se fabrică piese de schimb de prisos, ele trebuie soldate cu pierderi mari şi, dacă nu se fabrică destule, trebuie executate piesele care lipsesc la un cost foarte ridicat. Se cunoaşte pe de altă parte repartiţia $p(r)$ a probabilităţii unei cereri egale cu r. Notăm cu C_1 pierderea unitară a pieselor nevîndute şi cu C_2 pierderea relativă la suplimentul asupra costului de fabricaţie a pieselor care lipsesc. Costul de stocaj este neglijabil faţă de C_1 şi C_2.

2° *Aplicaţie numerică.* Numărul de piese de schimb de acest tip se face pe o perioadă lungă (mai mulţi ani). Rezultatul acestei cercetări figurează în tabelul :

Numărul de piese de schimb cerut de maşină în timpul perioadei considerate	Numărul de maşini
5	5
6	15
7	25
8	30
9	15
10	10

Seria proiectată este de 80 maşini iar costurile C_1 şi C_2 sînt $C_1 = 750$ lei, $C_2 = 3000$ lei. Piesele de schimb sînt de fapt subansamble complete.

R. 1° Costul de stocaj fiind neglijabil faţă de C_1 sau C_2, perioada de gestiune T nu intervine.

Fie s numărul de piese de schimb de plasat în stoc. Sînt posibile două situaţii, care se exclud reciproc :

$r \leqslant s$; stocul acoperă cererea şi se soldează o cantitate egală cu $s - r$ cu o pierdere unitară C_1;

$r > s$; există pierdere şi trebuie făcute special $r - s$ piese cu o pierdere unitară C_2.

Valoarea medie a cheltuielii este

$$\Gamma(s) = C_1 \sum_{r=0}^{s} (s - r)p(r) + C_2 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r - s)p(r).$$

Această valoare medie intervine în funcţia economică

$$\Gamma(s+1) = C_1 \sum_{r=0}^{s} (s-r)p(r) + C_1 \sum_{r=0}^{s} p(r) + C_2 \sum_{r=s-1}^{\infty} (r-s)p(r) - C_2 \sum_{r=s+1}^{\infty} p(r) =$$

$$= \Gamma(s) + (C_1 + C_2)p(r \leqslant s) - C_2.$$

De asemenea

$$\Gamma(s-1) = \Gamma(s) - (C_1 + C_2)p(r \leqslant s-1) + C_2.$$

Valoarea stocului s_0 care face $\Gamma(s)$ minim este astfel ca

$$\Gamma(s_0+1) < \Gamma(s_0) < \Gamma(s_0-1),$$

$$\Gamma(s_0+1) - \Gamma(s_0) > 0 \text{ atrage după sine } (C_1 + C_2)p(r \leqslant s) - C_2 > 0$$

şi

$$\Gamma(s_0-1) - \Gamma(s) > 0 \text{ atrage după sine } (C_1 + C_2)p(r \leqslant s_0 - 1) + C_2 > 0,$$

sau încă, notînd $\rho = \dfrac{C_2}{c_1 + c_2}$,

$$p(r \leqslant s_0 - 1) < \rho < p(r \leqslant s_0),$$

de unde

$$p(r \leqslant s_0) = p(0) + p(1) + \cdots + p(s_0).$$

2° Calculăm valoarea medie şi varianţa distribuţiei statistice a cererii de piese de schimb pentru o maşină

$$m = \bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = 7{,}65;$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i} = 1{,}73.$$

Distribuţia cererii totale pentru 80 de maşini este normală cu o medie

$$\bar{r} = 80 \cdot 7{,}65 = 612$$

şi o variantă

$$\sigma_r^2 = 80 \cdot 1{,}73 = 138.$$

Cu ajutorul tabelelor funcţiei de distribuţie $P(z)$ a legii normale reduse, se vede că valoarea lui z astfel ca o cerere inferioară sau egală cu $\bar{r} + z\sigma_r$ să aibă probabilitatea 0,8 este $z \approx 0{,}79$. Astfel numărul optim de piese puse în stoc este $s_0 = 621$.

X.20. O intreprindere de import-export se aprovizionează în toate semestrele. Costul de stocaj al unui articol $C_s = 100$ lei pe semestru. Preţul său de cumpărare (cuprinzînd toate taxele) este $a = 500$ lei şi preţul de vînzare $v = 800$ lei.

Cererea semestrială este repartizată după tabelul:

r	$p(r)$	r	$p(r)$
0	0,01	6	0,18
1	0,05	7	0,14
2	0,08	8	0,08
3	0,12	9	0,02
4	0,16		
5	0,16	>9	0

Toate articolele cerute şi care nu sînt în stoc sînt furnizate la sfîrşit de semestru. Se face atunci clientului o reducere: $C_p = 200$ lei.

1°. Stocul iniţial fiind nul, cu ce cantităţi trebuie să se aprovizioneze pentru maximizarea venitului pe un semestru?

2° În aceleaşi condiţii, cu ce cantitate se va aproviziona la începutul primului semestru, apoi la începutul semestrului al doilea pentru maximizarea venitului pe un an?

R. Se consideră două cazuri: $r \leqslant s$ (fig. X.20, *a*) venitul este

$$vr - C_s\left(s - \frac{r}{2}\right) - as,$$

$r > s$ (fig. X.20, *b*) venitul este

$$vs - C_s\frac{s^2}{2r} + (v - a - C_p)(r - s) - as$$

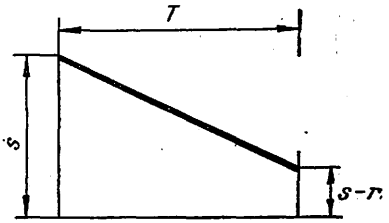


Fig. X. 20, a

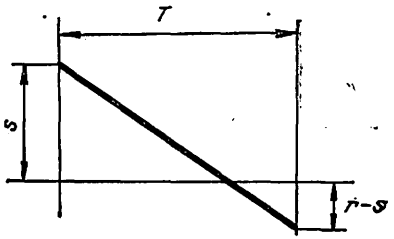


Fig. X. 20, b

sau

$$vr - C_s\frac{s^2}{2r} - C_p(r - s) - ar$$

sau încă

$$vr - C_s \frac{s^2}{2r} - as - (a + C_p)(r - s).$$

Venitul mediu este

$$\Gamma(s) = v \sum_{r=0}^{\infty} rp(r) - C_s \sum_{r=0}^{s} \left(s - \frac{r}{2}\right) p(r) - as \sum_{r=0}^{\infty} p(r) - C_s \sum_{r=s+1}^{\infty} \left| \frac{s^2}{2r} p(r) - \right.$$

$$-(a + C_p) \sum_{r=s+1}^{\infty} (r - s) p(r).$$

Calculăm

$$\Gamma(s+1) = \Gamma(s) - C_s \sum_{0}^{r} p(r) - C_s \sum_{s+1}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{p(r)}{r} - a + (a + C_p) \sum_{s+1}^{\infty} p(r)$$

sau

$$\Gamma(s+1) = \Gamma(s) - ap(r \leqslant s) - C_s \left[p(r \leqslant s) + \sum_{s+1}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{p(r)}{r} \right] + C_p[1 - p(r \leqslant s)].$$

Punînd $p(r \leqslant s) = P(s)$ și $p(r \leqslant s) + \sum_{s+1}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{p(r)}{r} = L(s)$, rezultă

$$\Gamma(s+1) = \Gamma(s) - aP(s) - C_s L(s) + C_p[1 - P(s)].$$

De asemenea

$$\Gamma(s) = \Gamma(s-1) - aP(s-1) - C_s L(s-1) + C_p[1 - P(s-1)].$$

Scriind că $\Gamma(s) - \Gamma(s+1) > 0$ și $\Gamma(s) - \Gamma(s-1) > 0$, se determină valoarea optimală s_0 a stocului care este astfel că

$$(a + C_p)P(s_0 - 1) + C_s L(s_0 - 1) < C_p < (a + C_p)P(s_0) + C_s L(s_0).$$

Calculăm s_0:

s	r	$p(r)$	$\frac{p(r)}{r}$	$\sum_{s+1}^{\infty} \frac{p(r)}{r}$	$\left(s + \frac{1}{2}\right) \sum_{s+1}^{\infty} \frac{p(r)}{r}$	$P(S)$	$L(s)$
0	0	0,01	—	0,2642	0,1321	0,01	0,1421
1	1	0,05	0,05	0,2142	0,3213	0,06	0,3813
2	2	0,08	0,04	0,1742	0,4355	0,14	0,5755
3	3	0,12	0,04	0,1342	0,4697	0,26	0,7297
4	4	0,16	0,04	0,0942	0,4239	0,42	0,8439
5	5	0,16	0,032	0,0622	0,3421	0,58	0,9221
6	6	0,18	0,03	0,0322	0,2093	0,76	0,9693
7	7	0,14	0,02	0,0122	0,0915	0,90	0,9915
8	8	0,08	0,01	0,0022	0,0187	0,98	0,9987
9	9	0,02	0,002	0	0	1	1
>9	>9	0	0	0	0	1	1

Pentru $s = 3$ avem

$$[700 \cdot 0{,}14 + 100 \cdot 0{,}5755 = 155{,}55] < 200 < [700 \cdot 0{,}26 +$$

$$+ 100 \cdot 0{,}7297 = 254{,}97].$$

Se va aproviziona deci cu o cantitate $s_0 = 3$.
Valoarea corespunzătoare a venitului mediu (valoarea medie) este

$$\Gamma(3) = 800 \cdot 4{,}89 - 100 \sum_{0}^{3} \left(3 - \frac{r}{2}\right) p(r) - 500 \cdot 3 - 100 \sum_{4}^{\infty} \frac{9}{2r} p(r) -$$

$$- 700 \sum_{4}^{\infty} (r - 3) p(r) = 3192 - 49 \cdot 5 - 1500 - 60{,}39 - 1470 = 832{,}11 \text{ lei.}$$

2° Considerăm semestrul doi.

Fie x cantitatea în stoc la sfîrşitul primului semestru. Venitul mediu al trimestrului doi este

$$\Gamma_2(x, s) = v \sum_{r=0}^{\infty} r p(r) - C_s \sum_{0}^{s} \left(s - \frac{r}{2}\right) p(r) - a(s - x) - C_s \sum_{s+1}^{\infty} \frac{s^2}{2r} p(r) -$$

$$- [a + C_p] \sum_{s+1}^{\infty} (r - s) p(r).$$

Pentru $x \leqslant 3$, valoarea optimă a stocului la începutul semestrului doi este dată prin formula

$$[a + C_p] P(s_0 - 1) + C_s L(s_0 - 1) < C_p < [a + C_p] P(s_0 - 1) + C_s L(s_0)$$

şi se găseşte

$$s_0 = 3,$$

căruia îi corespunde un venit mediu

$$\Gamma_2(x, 3) = 832{,}11 + 500\, x.$$

Pentru $x > 3$, stocul nu este reaprovizionat.

Se poate calcula uşor că

$$\Gamma_2(x, 2) = 787{,}66 + 500x, \qquad \Gamma_2(x, 8) = -657{,}54 + 500x,$$
$$\Gamma_2(x, 3) = 832{,}11 + 500x, \qquad \Gamma_2(x, 9) = -1243{,}5 + 500x,$$
$$\Gamma_2(x, 4) = 777{,}14 + 500x, \qquad \Gamma_2(x, 10) = -1843{,}5 + 500x,$$
$$\Gamma_2(x, 5) = 626{,}75 + 500x, \qquad \Gamma_2(x, 11) = -2443{,}5 + 500x,$$
$$\Gamma_2(x, 6) = 300{,}54 + 500x, \qquad \Gamma_2(x, 12) = -3043{,}5 + 500x.$$
$$\Gamma_2(x, 7) = -128{,}39 + 500x,$$

În rezumat:

dacă $x = 0$ se reaprovizionează cu 3 articole şi $\Gamma_2(0, 3) = 832{,}11$,
dacă $x = 1$ se reaprovizionează cu 2 articole şi $\Gamma_2(1, 3) = 1332{,}11$,
dacă $x = 2$ se reaprovizionează cu 1 articol şi $\Gamma_2(2, 3) = 1832{,}11$,
dacă $x = 3$ stocul nu va fi reaprovizionat şi $\Gamma_2(3, 3) = 2332{,}11$,
dacă $x = 4$ stocul nu va fi reaprovizionat şi $\Gamma_2(4, 4) = 2774{,}14$,
dacă $x = 5$ stocul nu va fi reaprovizionat şi $\Gamma_2(5, 5) = 3126{,}75$,
dacă $x = 5$ stocul nu va fi reaprovizionat şi $\Gamma_2(6, 6) = 3300{,}54$,
etc.

Considerăm acum două semestre în ansamblu.

Stocul iniţial fiind nul, dacă se aprovizionează cu 3 articole la începutul primului semestru, venitul mediu anual va fi

$$\Gamma_{1,2}(3) = \Gamma_1(3) + 0{,}01 \cdot \Gamma_2(3, 3) + 0{,}005 \cdot \Gamma_2(2, 3) + 0{,}08 \cdot \Gamma_2(1, 3) + 0{,}86 \cdot$$
$$\cdot \Gamma_2(0, 3) = 832{,}11 + 937{,}11 = 1769{,}22.$$

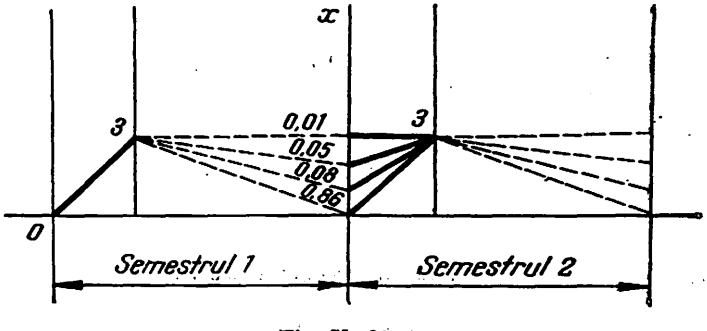


Fig. X. 20. c

În sfîrşit, se vede din fig. X.20, *c*, că probabilitatea pentru ca valoarea stocului la sfîrşitul primului semestru, să fie 3 este 0,01 etc. Dacă se aprovizionează cu 4 articole la începutul primului semestru, venitul mediu anual va fi:

$$\Gamma_{1,2}(4) = \Gamma_1(4) + 0{,}01\,\Gamma_2(4, 4) + 0{,}05\Gamma_2(3, 3) + 0{,}08\,\Gamma_2(2, 3) + 0{,}12\Gamma_2(1, 3) +$$

$$+ 0{,}74\Gamma_2(0, 3) = 777{,}14 + 1074{,}8814 = 1852{,}0214.$$

De asemenea

$$\Gamma_{1,2}(5) = 1948{,}9845;$$

$$\Gamma_{1,2}(6) = 1964{,}1641;$$

$$\rightarrow \quad \Gamma_{1,2}(7) = \boxed{1975,\ 8591};$$

$$\Gamma_{1,2}(8) = 1950{,}17.$$

Se constată că venitul mediu anual este maxim dacă se aprovizionează cu 7 articole la începutul primului semestru.

BIBLIOGRAFIE

1. *Angheluță, Th.*, Exerciții și probleme. Editura universității din Cluj, 1937.
2. *Angheluță, Th.*, Curs de teoria funcțiilor de variabilă complexă, ed. II., Editura tehnică București, 1957.
3. *Angot, A.*, Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică și telecomunicații, (trad. din l. franceză), Editura tehnică, București, 1966.
4. *Arghiriade, E.*, Curs de algebră superioară, vol. 1 și 2, Editura didactică și pedagogică, București, 1962.
5. *Bass, J.*, Exercices de mathématiques, The Macmillan Comp; New York, 1965.
6. *Carlan, H.*, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Paris, 1961.
7. *Ciorănescu, N.*, Tratat de matematici speciale, Editura didactică și pedagogică, București, 1962. D
8. *Ciucu, G., Simboan, G.*, Teoria probabilităților și statistică matematică, Culegere de probleme, Editura tehnică, București, 1962. o
9. *Ciucu, G., Craiu, V., Săcuiu, I.*, Culegere de probleme de teoria probabilităților, Editura tehnică, București, 1967.
10. *Ciucu, G., Craiu, V.*, Probleme de statistică matematică, Editura didactică și pedagogică, București, 1968.
11. *Craiu V.*, Verificarea ipotezelor statistice, Editura didactică și pedagogică, București, 1972. D
12. *Cristescu, R.*, Matematici superioare, Editura didactică și pedagogică, București 1963.
13. *Demidovici, B. P.*, Culegere de probleme și exerciții de analiză matematică, Editura tehnică, București, 1956.
14. *Denis-Papin, M., Kaufmann, A.*, Cours de calcul opérationnel appliqué, Editura Albin Michel, Paris, 1950.
15. *Denis-Papin, M.*, Cours de calcul matriciel appliqué, Editura Albin Michel, Paris, 1951.
16. *Denis-Papin, M.*, Cours de calcul tensoriel appliqué, Editura Albin Michel, Paris, 1966.
17. *Denis-Papin, M., Kaufmann, A.*, Calcul opérationnel, T. 1. 2., Editura Dunod, Paris, 1964.
18. *Emmanuel, D.*, Lecțiuni de teoria funcțiilor, vol. 1, Editura Cultura Națională, București, 1924.
19. *Ganea, T.*, Serii trigonometrice, Editura tehnică, București, 1964.
20. *Ghiunter, N. M. și Cuzmin, R. O.*, Culegere de probleme de matematici superioare, vol. 1, 2, 3 (trad. din l. rusă), Editura tehnică, București, 1953.

21. *Gmurman, V. E.*, **Problemas de la teorie de las probabilidades y de estadestica matematica.** Ed. Mir. 1975.
22. *Kamke, E.*, **Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen, I. II, Akademische verlagsgesellschaft,** Geest & Portig K. G., Leipzig, 1959.
23. *Knopp, K.*, **Aufgebensanemlung zur Funktionentheorie.** I. Berlin, 1923.
24. *Kuntzmann, J.*, **Mathématique de la physique et de la technique,** Editura Hermann, Paris, 1961.
25. *Jacob, C.*, **Curs de matematici superioare,** Editura tehnică, București, 1957.
26. *Lichnerowicz, A.*, **Elements de Calcul Tensoriel,** Editura Armand Collin, Paris, 1964.
27. *Mihoc, G.* și *Nădejde, I.*, **Programarea matematică,** vol. I, II, Editura științifică, București, 1966, 1967.
28. *Nicolescu, L. J.* și a., **Matematici pentru ingineri,** vol. 1, 2, Editura tehnică, 1969.
29. *Nicolescu, M.*, **Analiză matematică,** vol. 1, 2, 3, Editura tehnică, București, 1957, 1958, 1960.
30. *Nicolescu, M.*, **Funcții reale și elemente de topologie,** Editura didactică și pedagogică, București, 1968.
31. *Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S.*, **Manual de analiză matematică,** vol. 1, 2. Editura didactică și pedagogică, București, 1962—1964.
32. *Paull, S.*, **Topics in advanced mathematics for electronics technology,** J. Wiley, New York, 1966. D
33. *Reischer, C., ș. a.* **Teoria probabilităților,** Editura didactică și pedagogică, București, 1967.
34. *Rényi, A.*, **Calcul des probabilités,** Dunod, Paris, 1966.
35. *Roșculeț, M.*, **Analiza matematică,** vol. 1, 2. Editura didactică și pedagogică, București, 1964—1965.
36. *Sansone, G., Gerretsen, J.*, **Lectures on the theory of functions of a complex variable,** vol. 1, Edit. Noordhoff Groningen, 1960.
37. *Schwartz, L.*, **Methodes mathématiques pour les sciences physiques,** Editura Hermann, Paris, 1961.
38. *Smirnov, V. I.*, **Curs de matematici superioare,** vol. 1—5, Editura tehnică, București, 1953—1963.
39. *Stoilow, S.*, **Teoria funcțiilor de o variabilă complexă,** vol. 1, Editura Acad. R.S.R. București, 1954.
40. *Șabac, I. Gh.*, **Matematici speciale,** vol. 1, 2, Editura didactică și pedagogică, București, 1964—1965.
41. *Vrânceanu, Gh. G., ș. a.* **Probleme de geometrie diferențială,** Editura didactică și pedagogică, București, 1963.
42. *Teodorescu, N.*, **Metode vectoriale în fizică matematică,** vol. 1, 2, Editura tehnică, București, 1954.
43. *Urwin, M. K.*, **Advanced Calculus and vector Field Theory,** Pergamon Press, New York, 1966.
44. *Ventsel, H.*, **Thèorie des probabilitès,** Ed. Mir. 1973.
45. *Yule, G. U., Kendall, M. C.*, **Introducere în teoria statisticii.** Ed. științifică, Buc. 1969.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,36	0,1406	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,37	0,1443	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,38	0,1480	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,39	0,1517	0,75	0,2734
0,04	0,0166	0,40	0,1554	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,41	0,1591	0,77	0,2794
0.06	0,0239	0,42	0,1628	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,43	0,1664	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,44	0,1700	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,45	0,1736	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,46	0,1772	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,47	0,1808	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,48	0,1844	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,49	0,1879	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,50	0,1915	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,51	0,1950	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,52	0,1985	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,53	0,2019	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,54	0,2054	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,55	0,2088	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,56	0,2123	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,57	0,2157	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,58	0,2190	0,94	0,3269
0,23	0,0910	0,59	0,2224	0,95	0,3289
0,24	0,0948	0,60	0,2257	0,96	0,3315
0,25	0,0987	0,61	0,2291	0,97	0,3340
0,26	0,1026	0,62	0,2324	0,98	0,3365
0,27	0,1064	0,63	0,2357	0,99	0,3389
0,28	0,1103	0,64	0,2389	1,00	0,3413
0,29	0,1141	0,65	0,2422	1,01	0,3438
0,30	0,1179	0,66	0,2454	1,02	0,3461
0,31	0,1217	0,67	0,2486	1,03	0,3485
0,32	0,1255	0,68	0,2517	1,04	0,3508
0,33	0,1293	0,60	0,2549	1,05	0,3531
0,34	0,1331	0,70	0,2580	1,06	0,3554
0,35	0,1368	0,71	0,2611	1,07	0,3577

normale $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{1}} dt.$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,08	0,3599	1,44	0,4251	1,80	0,4641
1,09	0,3621	1,45	0,4265	1,81	0,4649
1,10	0,3643	1,46	0,4279	1,82	0,4656
1.11	0,3665	1,47	0,4292	1,83	0,4664
1,12	0,3686	1,47	0,4306	1,84	0,4671
1,13	0,3708	1,49	0,4319	1,85	0,4678
1,14	0,3729	1,50	0,4332	1,86	0,4686
1,15	0,3749	1,51	0,4345	1,87	0,4693
1,16	0,3770	1,52	0,4357	1,88	0,4699
1,17	0,3790	1,53	0,4370	1,89	0,4706
1,18	0,3810	1,54	0,4382	1,90	0,4713
1,19	0,3830	1,55	0,4394	1,91	0,4719
1,20	0,3849	1,56	0,4406	1,92	0,4726
1,21	0,3869	1,57	0,4418	1,93	0,4732
1,22	0,3883	1,58	0,4429	1,94	0,4738
1,23	0,3907	1,59	0,4441	1,95	0,4744
1,24	0,3925	1,60	0,4452	1,96	0,4750
1,25	0,3944	1,61	0,4463	1,97	0,4756
1,26	0,3962	1,62	0,4474	1,98	0,4761
1,27	0,3980	1,63	0,4484	1,99	0,4767
1,28	0,3997	1,64	0,4495	2,00	0,4772
1,29	0,4015	1,65	0,4505		
1,30	0,4032	1,66	0,4515		
1,31	0,4049	1,67	0,4525		
1,32	0,4066	1,68	0,4535		
1,33	0,4082	1,69	0,4545		
1,34	0,4099	1,70	0,4554		
1,35	0,4115	1,71	0,4564		
1,36	0,4131	1,72	0,4573		
1,37	0,4147	1,73	0,4582		
1,38	0,4162	1,74	0,4591		
1,39	0,4177	1,75	0,4599		
1,40	0,4192	1,76	0,4608		
1,41	0,4207	1,77	0,4616		
1,42	0,4222	1,78	0,4625		
1,43	0,4236	1,79	0,4633		

Punctele critice ale distribuţiei χ^2

Nr. grade de libertate	Prag de semnificaţie α			
	0,01	0,025	0,05	0,95
1	6,6	5,0	3,8	0,0039
2	9,2	7,4	6,0	0,103
3	11,3	9,4	7,8	0,352
4	13,3	11,1	9,5	0,711
5	15,1	12,8	11,1	1,15
6	16,8	14,4	12,6	1,64
7	18,5	16,0	14,1	2,17
8	20,1	17,5	15,5	2,73
9	21,7	19,0	16,9	3,33
10	23,2	20,5	18,3	3,94
11	24,7	21,9	19,7	4,57
12	26,2	23,3	21,0	5,23
13	27,7	24,7	22,4	5,89
14	29,1	26,1	23,7	6,57
15	30,6	27,5	25,0	7,26
16	32,0	28,8	26,3	7,96
17	33,4	30,2	27,6	8,67
18	34,8	31,5	28,9	9,39
19	36,2	32,9	30,1	10,1
20	37,6	34,2	31,4	10,9
21	38,9	35,5	32,7	11,6
22	40,3	36,8	33,9	12,3
23	41,6	38,1	35,2	13,1
24	43,0	39,4	36,4	13,8
25	44,3	40,6	37,7	14,6
26	45,6	41,9	38,9	15,4
27	47,0	43,2	40,1	16,2
28	48,3	44,5	41,3	16,9
29	49,6	45,7	42,6	17,7
30	50,9	47,0	43,8	18,5

Punctele critice ale distribuţiei Student

Nr. grade de libertate	Prag de semificaţie α (regiune critică bilaterală)			
	0,10	0,05	0,02	0,01
1	6,31	12,7	3,82	63,7
2	2,92	4,30	6,94	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,01	2,57	3,37	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,73	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,71	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,46	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
60	1,67	2,00	2,39	2,66
120	1,66	1,98	2,36	2,62
	0,05	0,025	0,01	0,005
	Prag de semnificaţie α (regiune critică unilaterală)			

	k_2 \ k_1	k_1 = nr de grade de libertate a dispersiei mari; 1	2	3	4	5
$\alpha = 0{,}01$	1	4052	4999	5403	5625	5764
	2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30
	3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24
	4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52
	5	16,26	13,27	12,05	11,39	10,97
	6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75
	7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46
	8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63
	9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06
	10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64
	11	9,85	7,20	6,22	5,67	5,32
	12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06
	13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86
	14	8,86	6,51	5,56	5,30	4,69
	15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56
	16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44
	17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34
$\alpha = 0{,}05$	1	161	200	216	225	230
	2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30
	3	10,13	9,55	9,28	6,12	9,01
	4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26
	5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05
	6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39
	7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97
	8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69
	9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48
	10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33
	11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20
	12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11
	13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02
	14	4,60	3,74	3,34	3,16	2,96
	15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90
	16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85
	17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81

distribuţiei Fisher—Snedecor

k_2 = nr. de grade de libertate a dispersiei mici

6	7	8	9	10	11	12
5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
4,82	4,65	4,50	4,3	4,30	4,22	4,16
4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,57
4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

234	237	239	241	242	243	244
19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

ANEXA 5

β	t_β	β	t_β	β	t_β
0,80	1,282	0,90	1,643	0,9973	3,000
0,81	1,310	0,91	1,694	0,999	3,290
0,82	1,340	0,92	1,750		
0,83	1,371	0,93	1,810		
0,84	1,404	0,94	1,880		
0,85	1,439	0,95	1,960		
0,86	1,475	0,96	2,053		
0,87	1,513	0,97	2,169		
0,88	1,554	0,98	2,325		
0,89	1,597	0,99	2,576		

ANEXA 6

Tabela cu valori pentru $t_\beta = t(\beta, n)$

n \ β	0,95	0,99	n \ β	0,95	0,99	n \ β	0,95	0,99
5	2,78	4,66	16	2,13	2,95	60	2,001	2,662
6	2,57	4,03	17	2,12	2,92	70	1,996	2,649
7	2,45	3,71	18	2,11	2,90	80	1,991	2,640
8	2,37	3,50	19	2,10	2,88	90	1,987	2,633
9	2,31	3,36	20	2,093	2,861	100	1,984	2,627
10	2,26	3,25	25	2,064	2,797	120	1,980	2,617
11	2,23	3,17	30	2,045	2,756	∞	1,960	2,576
12	2,20	3,11	35	2,032	2,729			
13	2,18	3,06	40	2,023	2,708			
14	2,16	3,01	45	2,016	2,692			
15	2,15	2,98	50	2,009	2,697			

ANEXA 7

Tabela de valori pentru $q = q(\beta, n)$

n \ β	0,95	0,99	n \ β	0, 5	0,99	n \ β	0,95	0,99
5	1,37	2,67	15	0,46	0,73	45	0,22	0,92
6	1,09	2,01	16	0,44	0,70	50	0,21	0,30
7	0,92	1,62	17	0,42	0,66	60	0,188	0,269
8	0,80	1,38	18	0,40	0,63	70	0,174	0,245
9	0,71	1,20	19	0,39	0,60	80	0,161	0,226
10	0,65	1,08	20	0,37	0,58	90	0,151	0,211
11	0,59	0,98	25	0,32	0,49	100	0,143	0,198
12	0,55	0,90	30	0,28	0,43	150	0,115	0,160
13	0,52	0,83	35	0,26	0,38	200	0,099	0,136
14	0,48	0,78	40	0,24	0,35	250	0,089	0,120